

数 学

(情—自然情報・理・医・工・農)

2 月 25 日(日) 12:30—14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち答案紙 5 枚、数学公式集 3 枚、草稿用紙 3 枚)である。
問題は各答案紙に 1 題ずつ印刷されている。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. 草稿用紙のほか、この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了時刻までは退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。
10. 問題④は選択問題であり、(a)、(b)の 2 題からなるが、いずれかの 1 題だけを解答するものとする。④の答案として 1 題だけを提出する。他方の答案紙は、大きく斜線を引いたうえで、最後に提出する。

1

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

1 2行2列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。 a, b, d が実数で $c=0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を上三角行列という。また,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

- (1) $A^2 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ。
- (2) $A^3 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ。
- (3) 上三角行列 A が $A^4 = E$ をみたすとき, $A^2 = E$ となることを示せ。

1 (解答欄)

2

理科系

受験番号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

- 2 (1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ。
- (2) 方程式 $f(x) = a$ (a は実数) が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ を持つとする。 $\ell = \gamma - \alpha$ を β のみを用いて表せ。
- (3) a が (2) の条件のもとで変化するとき ℓ の動く範囲を求めよ。

2 (解答欄)

3

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

3

数列 $\{a_n\}$ ($a_n > 0$) を次の規則によって定める：

$$a_1 = 1 ; \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

曲線 $y = 1/\sqrt[3]{x}$ と、 x 軸および 2 直線 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} V_n$ を求めよ。 ※ $y = 1/\sqrt[3]{x}$ は $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ を意味する。

3

(解答欄)

4

(a)

理科系

受 験 番 号				

(a)

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

問題4は選択問題である。つぎの4(a)または別紙の4(b)のいずれか一方を選んで解答せよ。

4

(a) 原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円に、円外の点 $P(x_0, y_0)$ から 2 本の接線を引く。

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき、点 Q の座標 (x_1, y_1) を点 P の座標 (x_0, y_0) を用いて表せ。また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ。

(2) 点 P が直線 $x + y = 2$ 上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

4

(解答欄)

4

(b)

理科系

受 験 番 号

(b)

32 数 学

答 案 紙

受験番号

問題4は選択問題である。つぎの4(b)または別紙の4(a)のいずれか一方を選んで解答せよ。

4

(b) 袋の中に赤と黄と青の玉が1個ずつ入っている。「この袋から玉を1個取り出して戻し、出た玉と同じ色の玉を袋の中に1個追加する」という操作を N 回繰り返した後、赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

- (1) 連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ。
- (2) 一般の N に対し $p_N(m)$ ($1 \leq m \leq N+1$) を求めよ。

4

(解答欄)

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または 0)
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5. $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の 2 点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点:

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. 円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ベクトルと行列)

10. 2 つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ($ad - bc \neq 0$)

(複 素 数)

12. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
13. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
14. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
19. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
20. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
21. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$
22. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
23. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数 列)

24. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$, ($l = a + (n-1)d$)
25. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\ldots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$34. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log |f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 \quad (a > 0), \quad \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (a \neq 0), \quad \int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列 ・ 組 合 せ)

$$40. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, \quad (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$

