

求める円の半径を r とおく.

中心 P は, $x < 6$ にあることに注意すると,

$$P(6-r, y)$$

とおける.

このとき, $AP = r + 3$ より

$$(6-r)^2 + (y-2)^2 = (r+3)^2$$

$$\iff (y-2)^2 = 18r - 27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また, $BP = r + 1$ より

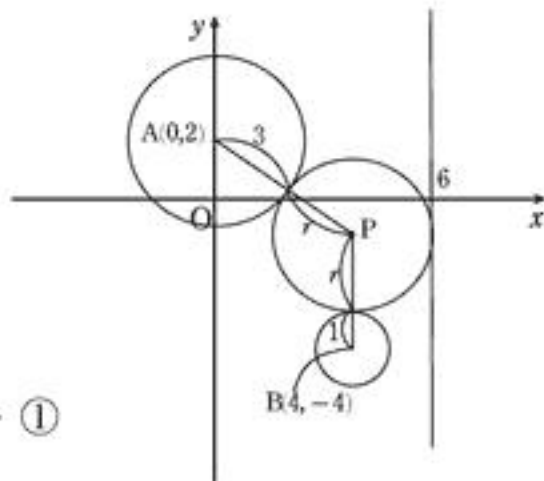
$$(2-r)^2 + (y+4)^2 = (r+1)^2$$

$$\iff (y+4)^2 = 6r - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より $(r, y) = (2, -1), (14, -13)$

したがって,

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 4 \quad \text{または} \quad (x+8)^2 + (y+13)^2 = 196$$



$$(1) (x-2)^2 + |2x+3y-1| \leq 4 \quad \dots\dots ①$$

(i) $2x+3y-1 \geq 0$ のとき

このとき,

$$① \iff (x-2)^2 + (2x+3y-1) \leq 4$$

$$\iff y \leq -\frac{1}{3}(x^2 - 2x - 1)$$

(ii) $2x+3y-1 < 0$ のとき

このとき,

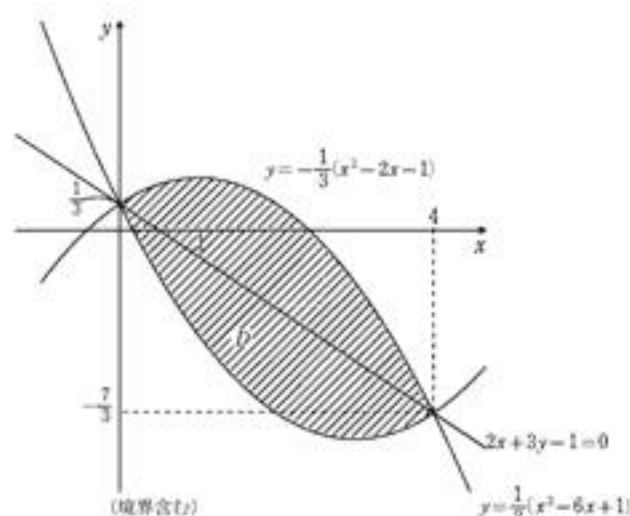
$$① \iff (x-2)^2 - (2x+3y-1) \leq 4$$

$$\iff y \geq \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 1)$$

よって, D の概形は右図のようになる.

また, 領域 D の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \left\{ -\frac{1}{3}(x^2 - 2x - 1) - \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 1) \right\} dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^4 x(x-4) dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} (4-0)^3 \\ &= \frac{64}{9} \end{aligned}$$



(2) $x+y=k$ とおくと, これは傾き -1 , y 切片 k の直線を表す.

この直線を D と交わるように動かし, k の最大値, 最小値を求めればよい.

(i) k の最大値

$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ と接するときであり,

$$(A) \left[\begin{aligned} y' &= -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = -1 \end{aligned} \right.$$

を解くと, $x = \frac{5}{2}$ のとき.

よって,

$$\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{12} \right) \text{ のとき } \text{最大値 } \frac{29}{12}$$

(ii) k の最小値

$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ と接するときであり,

$$(B) \left[\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3}x - 2 = -1 \end{aligned} \right.$$

を解くと, $x = \frac{3}{2}$ のとき.

よって,

$$(x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{23}{12} \right) \text{ のとき } \text{最小値 } -\frac{5}{12}$$

((A) の部分の別解)

$$\left\{ \begin{aligned} y &= -x + k \end{aligned} \right. \quad \dots ②$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{aligned} \right. \quad \dots ③$$

(②-③) $\times 3$ より

$$0 = x^2 - 5x + 3k - 1 \quad \dots ④$$

これが重解をもてばよいので

$$(\text{判別式 } D) = (-5)^2 - 4(3k-1) = 0$$

$$\iff k = \frac{29}{12}$$

また, ④の重解は $x = \frac{5}{2}$ である.

以上のことから,

$$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{12} \right) \text{ のとき } \text{最大値 } \frac{29}{12}$$

(*) 全く同様の (別解) が(B)にもある.

3 (A)

(1) $y \geq 0$ であるから

$$8 \geq 3x + 2y \geq 3x$$

これより, $x = 0, 1, 2$

$$\begin{cases} x=0 \text{ のとき,} & 2y \leq 8 \text{ より,} & y=0, 1, 2, 3, 4 \\ x=1 \text{ のとき,} & 2y \leq 5 \text{ より,} & y=0, 1, 2 \\ x=2 \text{ のとき,} & 2y \leq 2 \text{ より,} & y=0, 1 \end{cases}$$

したがって, 求める (x, y) の個数は 10 個

(1) の別解 1

$x \geq 0$ であるから

$$8 \geq 3x + 2y \geq 2y$$

これより, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

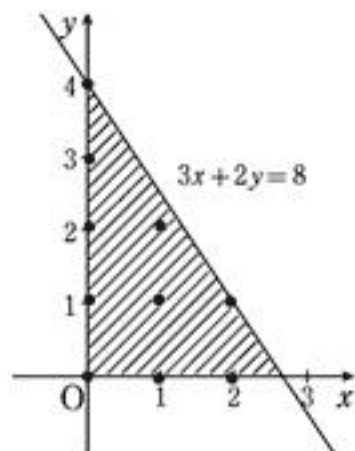
$$\begin{cases} y=0 \text{ のとき,} & 3x \leq 8 \text{ より,} & x=0, 1, 2 \\ y=1 \text{ のとき,} & 3x \leq 6 \text{ より,} & x=0, 1, 2 \\ y=2 \text{ のとき,} & 3x \leq 4 \text{ より,} & x=0, 1 \\ y=3 \text{ のとき,} & 3x \leq 2 \text{ より,} & x=0 \\ y=4 \text{ のとき,} & 3x \leq 0 \text{ より,} & x=0 \end{cases}$$

したがって, 求める (x, y) の個数は 10 個

(1) の別解 2

右図の領域内の格子点の個数を
求めればよいので

$$5 + 3 + 2 = 10 \text{ 個}$$



(2)

① $x = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 334$) のとき

このとき,

$$2y \leq 2008 - 6k$$

$$\iff y \leq 1004 - 3k$$

より, $y = 0, 1, 2, \dots, 1004 - 3k$ の $1005 - 3k$ 個

② $x = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 334$) のとき

このとき,

$$2y \leq 2008 - 3(2k + 1)$$

$$\iff 2y \leq 2005 - 6k$$

より, $y = 0, 1, 2, \dots, 1002 - 3k$ の $1003 - 3k$ 個

したがって, 求める (x, y) の個数は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{334} (1005 - 3k) + \sum_{k=0}^{334} (1003 - 3k) \\ &= \sum_{k=0}^{334} (2008 - 6k) \\ &= \frac{(2008 + 4) \times 335}{2} \\ &= 337010 \end{aligned}$$