

(1)

ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2 + 2A + 2E = O$$

が成立する。ここで、 $f(x)$ を $x^2 + 2x + 2$ で割ると、

$$\text{商} : x^2 + (a-2)x + b - 2a + 2$$

$$\text{余り} : (c - 2b + 2a)x - 2b + 4a - 2$$

であるから、

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2 = (x^2 + 2x + 2) \{ x^2 + (a-2)x + b - 2a + 2 \} \\ + (c - 2b + 2a)x - 2b + 4a - 2$$

が成立し、 A と E は可換であるから

$$A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + 2E \\ = (A^2 + 2A + 2E) \{ A^2 + (a-2)A + (b-2a+2)E \} \\ + (c-2b+2a)A + (-2b+4a-2)E \\ = (c-2b+2a)A + (-2b+4a-2)E$$

も成立する。ここで仮定より、

$$A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + 2E = O$$

であるから、

$$(c-2b+2a)A + (-2b+4a-2)E = O$$

となる。さらに、 A が E の実数倍でないので、

$$\begin{cases} c-2b+2a=0 \\ -2b+4a-2=0 \end{cases}$$

これより、

$$b=2a-1, c=2a-2$$

$$(\text{答}) \quad b=2a-1, c=2a-2$$

(2)

(1)の結果より

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2) \{ x^2 + (a-2)x + 1 \}$$

と因数分解ができる。ここで、

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

は実数解を持たないことに注意すると、 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つの正の解を持つためには、

$$x^2 + (a-2)x + 1 = 0$$

が少なくとも 1 つの正の解を持てばよい。

$$g(x) = x^2 + (a-2)x + 1$$

とおくと、 $g(0)=1$ に注意して、 $g(x)=0$ が少なくとも 1 つの正の解を持つためには、

$$\begin{cases} \frac{2-a}{2} > 0 \\ D = (a-2)^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

これを解いて

$$a \leq 0$$

$$(\text{答}) \quad a \leq 0$$

(1)

$$\triangle BQR : \triangle RQC = t : 1-t$$

より

$$\begin{cases} \triangle BQR = (1-s)t \\ \triangle RQC = (1-s)(1-t) \end{cases}$$

とおける。このとき、

$$\begin{cases} \triangle RBC = \triangle BQR + \triangle RQC = 1-s \\ \triangle RBC : \triangle ARB = 1-s : s \end{cases}$$

であるから

$$\triangle ARB = s$$

となる。ここで、

$$\triangle ARB : \triangle ARC = t : 1-t$$

であるから、

$$\begin{aligned} \triangle APR &= s \triangle ARC \\ &= s \cdot \frac{1-t}{t} \triangle ARB \\ &= \frac{(1-t)s^2}{t} \end{aligned}$$

よって、

$$\triangle APR = 2 \triangle BQR$$

より、

$$\frac{(1-t)s^2}{t} = 2(1-s)t \Leftrightarrow (1-t)s^2 + 2t^2s - 2t^2 = 0$$

これを解くと、

$$s = \frac{-t^2 \pm t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

であり、

$$0 < t < 1, \quad 0 < s < 1$$

より、

$$s = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

$$(答) \quad s = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

(2)

(1)より

$$\frac{s}{t} = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

これより

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{s}{t} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$(答) \quad \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b \log x dx \\
 &= [x \log x - x]_a^b \\
 &= b \log b - b - a \log a + a
 \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{\log a}^{\log b} e^y dy \\
 &= [e^y]_{\log a}^{\log b} \\
 &= b - a
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 S = T &\Leftrightarrow b \log b - b - a \log a + a = b - a \\
 &\Leftrightarrow b \log b - 2b = a \log a - 2a
 \end{aligned}$$

したがって

$$f(x) = x \log x - 2x$$

とおくとき,

$$f(b) = f(a) \quad (b > a)$$

となる b が存在するような a の値の範囲を求めればよい。ここで,

$$f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 2 = \log x - 1$$

より, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	1	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

したがって,

$$f(b) = f(a) \quad (b > a)$$

なる b が存在するような a の値の範囲は

$$1 < a < e$$

(答) $1 < a < e$

(A)

(1)

① $x=2k$ ($k=0,1,2,\cdots,334$) のとき

このとき、

$$2y \leq 2008 - 6k \Leftrightarrow y \leq 1004 - 3k$$

より、

$$y=0,1,2,\cdots,1004-3k$$

の $1005-3k$ 個。② $x=2k+1$ ($k=0,1,2,\cdots,334$) のとき

このとき、

$$2y \leq 2008 - 3(2k+1) \Leftrightarrow 2y \leq 2005 - 6k$$

より、

$$y=0,1,2,\cdots,1002-3k$$

の $1003-3k$ 個。したがって、求める (x,y) の個数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{334} (1005-3k) + \sum_{k=0}^{334} (1003-3k) &= \sum_{k=0}^{334} (2008-6k) \\ &= \frac{(2008+4) \cdot 335}{2} \\ &= 337010 \end{aligned}$$

(答) 337010

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} < 10 \Leftrightarrow 2y+z \leq 60-3x \cdots \textcircled{1}$$

 $x=t$ のとき、①を満たす 0 以上の整数の組 (y,z) の個数を $f(t)$ とおく。 ($t=0,1,2,3,\cdots,20$)(i) t が偶数のとき

$$t=2k$$

とおくと、①は

$$2y+z \leq 60-6k$$

であり、 $y=l$ ($l=0,1,\cdots,30-3k$) 上の格子点の個数は

$$61-6k-2l \text{ 個}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(2k) &= \sum_{l=0}^{30-3k} (61-6k-2l) \\ &= \frac{1}{2} (31-3k)(61-6k+1) \\ &= (31-3k)^2 \end{aligned}$$

(ii) t が奇数のとき

$$t=2k-1$$

とおくと、①は

$$2y+z \leq 63-6k$$

であり、 $y=l$ ($l=0,1,\cdots,31-3k$) 上の格子点の個数は

$$64-6k-2l \text{ 個}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(2k-1) &= \sum_{l=0}^{31-3k} (64-6k-2l) \\ &= \frac{1}{2} (32-3k)(64-6k+2) \\ &= (33-3k)(32-3k) \end{aligned}$$

これより、求める (x,y,z) の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{20} f(t) &= f(0) + \sum_{k=1}^{10} \{f(2k-1) + f(2k)\} \\ &= 961 + \sum_{k=1}^{10} (18k^2 - 381k + 2017) \\ &= 961 + 3 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - 381 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 2017 \cdot 10 \\ &= 7106 \end{aligned}$$

(答) 7106

(B)

(1)

袋 B から取り出される赤玉の個数を X とすると

$$X=0,1,2$$

であり、 $X=0$ となる確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

 $X=1$ となる確率は

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

 $X=2$ となる確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

以上より、求める期待値は

$$0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

(答) $\frac{6}{5}$

(2)

5 つの玉のうち、赤玉が 3 つであるのは

(i) 袋 A から赤玉 3 つを取り出し、袋 B から白玉 2 つを取り出すとき

(ii) 袋 A から赤玉 2 つ、白玉 1 つを取り出し、袋 B から赤玉 1 つ、白玉 1 つを取り出すとき

(iii) 袋 A から赤玉 1 つ、白玉 2 つを取り出し、袋 B から赤玉 2 つを取り出すとき

の 3 つの場合がある。

(i) の確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{140}$$

(ii) の確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{9}{35}$$

(iii) の確率は

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{9}{70}$$

以上より、求める確率は

$$\frac{1}{140} + \frac{9}{35} + \frac{9}{70} = \frac{11}{28}$$

(答) $\frac{11}{28}$

(3)

袋 A から 3 つの玉を取り出したとき、次の 4 つの場合がある。

(i) 赤玉を 3 つ取り出したときは、残りの玉は赤玉 1 つ、白玉 4 つ

(ii) 赤玉を 2 つ、白玉を 1 つ取り出したときは、残りの玉は赤玉 2 つ、白玉 3 つ

(iii) 赤玉を 1 つ、白玉を 2 つ取り出したときは、残りの玉は赤玉 3 つ、白玉 2 つ

(iv) 白玉を 3 つ取り出したときは、残りの玉は赤玉 4 つ、白玉 1 つ

袋 B には赤玉 3 つ、白玉 2 つで、袋 A の残りの個数と同数であることに注意すると、

(i), (ii) の場合、残り 2 つは袋 B から取り出したほうがよい。

(iii) の場合、残り 2 つは袋 A, B どちらでもよい。

(iv) の場合、残りの 2 つは袋 A から取り出したほうがよい。

この方法の下で、最終的に取り出される赤玉の個数を Y とすると、 Y のとりうる値は

$$Y=1,2,3,4,5$$

である。

(ア) $Y=1$ となるのは

・最初、袋 A から白玉が 3 つ取り出され、次に袋 A から白玉 1 つ、赤玉 1 つが取り出される

・最初、袋 A から白玉が 2 つ、赤玉が 1 つ取り出され、次に袋 B から白玉が 2 つ取り出される

場合があり、その確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_4C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_5C_2} + \frac{{}_4C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{4}{56} \cdot \frac{4}{10} + \frac{24}{56} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{14}$$

(イ) $Y=2$ となるのは

・最初、袋 A から白玉が 3 つ取り出され、次に袋 A から赤玉が 2 つ取り出される

・最初、袋 A から白玉 2 つ、赤玉 1 つ取り出され、次に袋 B から白玉 1 つ、赤玉 1 つが取り出される

・最初、袋 A から白玉 1 つ、赤玉 2 つが取り出され、次に袋 B から白玉が 2 つ取り出される

の 3 つの場合があり、その確率は

$$\begin{aligned} &\frac{{}_4C_3}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_4C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_4C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_5C_2} + \frac{{}_4C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \\ &= \frac{4}{56} \cdot \frac{6}{10} + \frac{24}{56} \cdot \frac{6}{10} + \frac{24}{56} \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{35} \end{aligned}$$

(ウ) $Y=3$ となるのは

(2) より

$$\frac{11}{28}$$

(エ) $Y=4$ となるのは

・最初、袋 A から白玉 1 つ、赤玉 2 つが取り出され、次に袋 B から赤玉が 2 つ取り出される

・最初、袋 A から赤玉が 3 つ取り出され、次に袋 B から白玉 1 つ、赤玉 1 つが取り出される

の 2 つの場合があり、その確率は

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_4C_3}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_5C_2}$$

$$= \frac{24}{56} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{56} \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{35}$$

(オ) $Y=5$ となるのは

最初、袋 A から赤玉が 3 つ取り出され、次に袋 B から赤玉が 2 つ取り出される

ときであり、その確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_8C_3} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{4}{56} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{140}$$

以上より、求める期待値は

$$1 \cdot \frac{1}{14} + 2 \cdot \frac{12}{35} + 3 \cdot \frac{11}{28} + 4 \cdot \frac{6}{35} + 5 \cdot \frac{3}{140} = \frac{191}{70}$$

(答) $\frac{191}{70}$