

$$(1) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ より}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{これと, } b > 0 \text{ より, } a = \frac{1}{3}, b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \cdot 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \overrightarrow{OC} = (x, y, z) \text{ とおくと,}$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times |z| \quad \dots\dots\text{①}$$

$$\text{である. ここで, } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{5}{6}, |\overrightarrow{OC}| = 1 \text{ より}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \dots\dots\text{②}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}y = \frac{5}{6} \end{cases} \quad \dots\dots\text{③}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \dots\dots\text{④}$$

$$\text{②, ③ より, } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ であるから, ④ に代入すると,}$$

$$z^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore |z| = \frac{1}{2}$$

$$\text{① に代入して,}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{18} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (1) 直線 PQ の傾きは、 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、
 点 P における接線の傾きは、 $\sqrt{3}$ である。
 よって、

$$2ap = \sqrt{3} \quad \cdots \cdots ①$$

また、右図のように、 P, Q からそれぞれ
 x 軸、 y 軸に垂直に線を引き、その交点を
 H とすると、 $\triangle QPH$ は

$$PQ = 1, PH = \frac{1}{2}, HQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

の三角形であるから

$$q - 1 = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots ②, b - p = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots ③$$

②より $q = \frac{3}{2}$ (p, q) は放物線上の点であるから

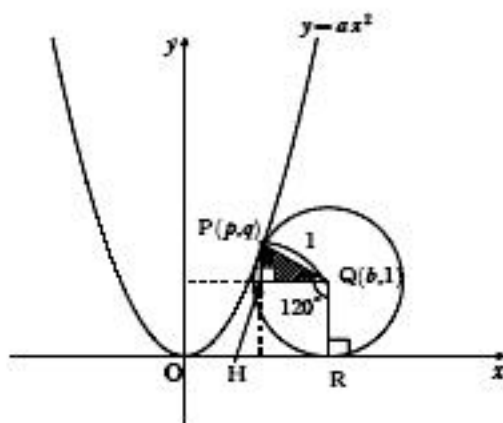
$$q = ap^2$$

$$\iff \frac{3}{2} = ap^2 \quad \cdots \cdots ④$$

④÷①より、 $p = \sqrt{3}$

これを、①、③に代入して、

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



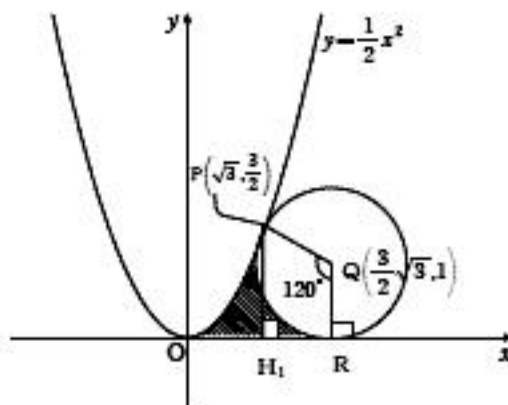
- (2) (1)より右図のようになる。よって面積 S は

$$S = \text{Area of } \triangle OPH_1 + \text{Area of } \text{rectangle } PH_1RQ - \text{Area of sector } PQR$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\pi$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$$

$$= \frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$$



$\cdots \cdots (\text{答})$

(1)

さいころを2回投げたとき、出る目の積の一の位は右の表のようになる。

よって、

$$\begin{cases} p_2(0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ p_2(1) = \frac{1}{36} \quad \dots\dots(\text{答}) \\ p_2(2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

2回目\1回目	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

(2) さいころを $n+1$ 回投げたとき、出る目の積の一の位が1となるのは

- $$\begin{cases} \text{① } n \text{ 回投げたとき、出る目の積の一の位が1で、} n+1 \text{ 回目に1の目が出る} \\ \text{② } n \text{ 回投げたとき、出る目の積の一の位が7で、} n+1 \text{ 回目に3の目が出る} \end{cases}$$

の2つの場合がある。これより、

$$p_{n+1}(1) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(7) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) $q_n = p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ とおく。

さいころを $n+1$ 回投げたとき、出る目の積の一の位が「5以外の奇数」になるのは、 n 回投げたとき、出る目の積の一の位が「5以外の奇数」で $n+1$ 回目に1または3の目が出るときであるから、

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$$

これと、 $q_1 = \frac{1}{3}$ より、

$$q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \dots\dots(\text{答})$$