

$$(1) \quad x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ より, } 2x - \frac{2y}{b^2}y' = 0$$

$y \neq 0$ のとき

$$y' = \frac{b^2x}{y}$$

よって、双曲線上の点 B における法線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{t}{b^2s}(x-s) + t \\ &= -\frac{t}{b^2s}x + \frac{t}{b^2} + t \end{aligned}$$

これが、A (0, a) を通るので

$$\begin{aligned} a &= \frac{t}{b^2} + t \\ \therefore \quad t &= \frac{ab^2}{1+b^2} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

また、B は双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点であるから、

$$\begin{aligned} s^2 - \frac{t^2}{b^2} &= 1 \\ \therefore \quad s &= \sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{ab}{1+b^2}\right)^2} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

さらに、 $r = AB$ より

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{s^2 + (a-t)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{a^2}{1+b^2}} \end{aligned} \quad \dots\dots\textcircled{1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) y 軸についての対称性および $a > t$ より、 $\triangle ABC$ が正三角形になるための条件は、直線 AB の傾きが $-\sqrt{3}$ 、すなわち、

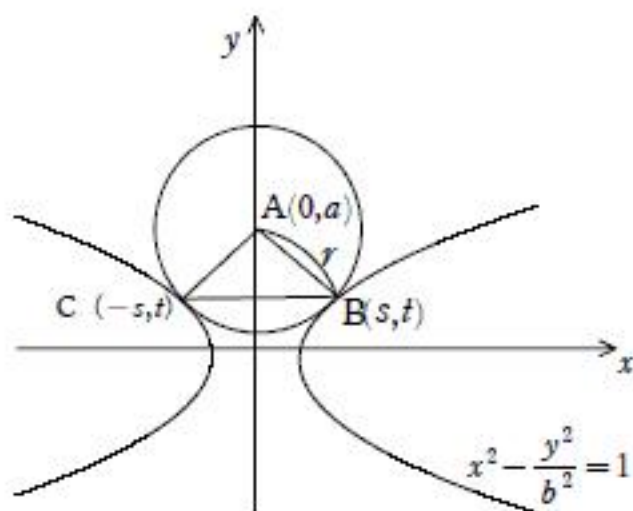
$$\begin{aligned} \frac{t-a}{s} &= -\sqrt{3} \\ a-t &= \sqrt{3}s \\ \frac{a}{1+b^2} &= \sqrt{3}s \end{aligned}$$

両辺正であるから、2 乗して、(1) の結果を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(1+b^2)^2} &= 3 \left\{ 1 + \frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2} \right\} \\ (1-3b^2)a^2 &= 3(1+b^2)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

ここで、②を満たす $a(>0)$ が存在する条件は、 $1-3b^2 > 0$ であり、このとき①より、 r も確かに存在する。 $b > 0$ と合わせて、求める b の値の範囲は、

$$0 < b < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$\begin{cases} f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt & \dots ① \\ g(\theta) = f(\cos \theta) - f(\sin \theta) & \dots ② \end{cases}$$

(1) ①より, $f'(x) = \sqrt{1-x^2}$ であるから, ②より

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= f'(\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) - f'(\sin \theta) \cdot \cos \theta \\ &= -\sin \theta |\sin \theta| - \cos \theta |\cos \theta| \\ &= \begin{cases} -1 & \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos 2\theta & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \\ 1 & \left(\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\right) \\ -\cos 2\theta & \left(\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi\right) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1)の結果より,

$$g(\theta) = \begin{cases} -\theta + C_1 & \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta + C_2 & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \\ \theta + C_3 & \left(\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\right) \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta + C_4 & \left(\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(ただし, C_1, C_2, C_3, C_4 は積分定数)

ここで, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ であるから, $C_1 = \frac{\pi}{4}$ であり,

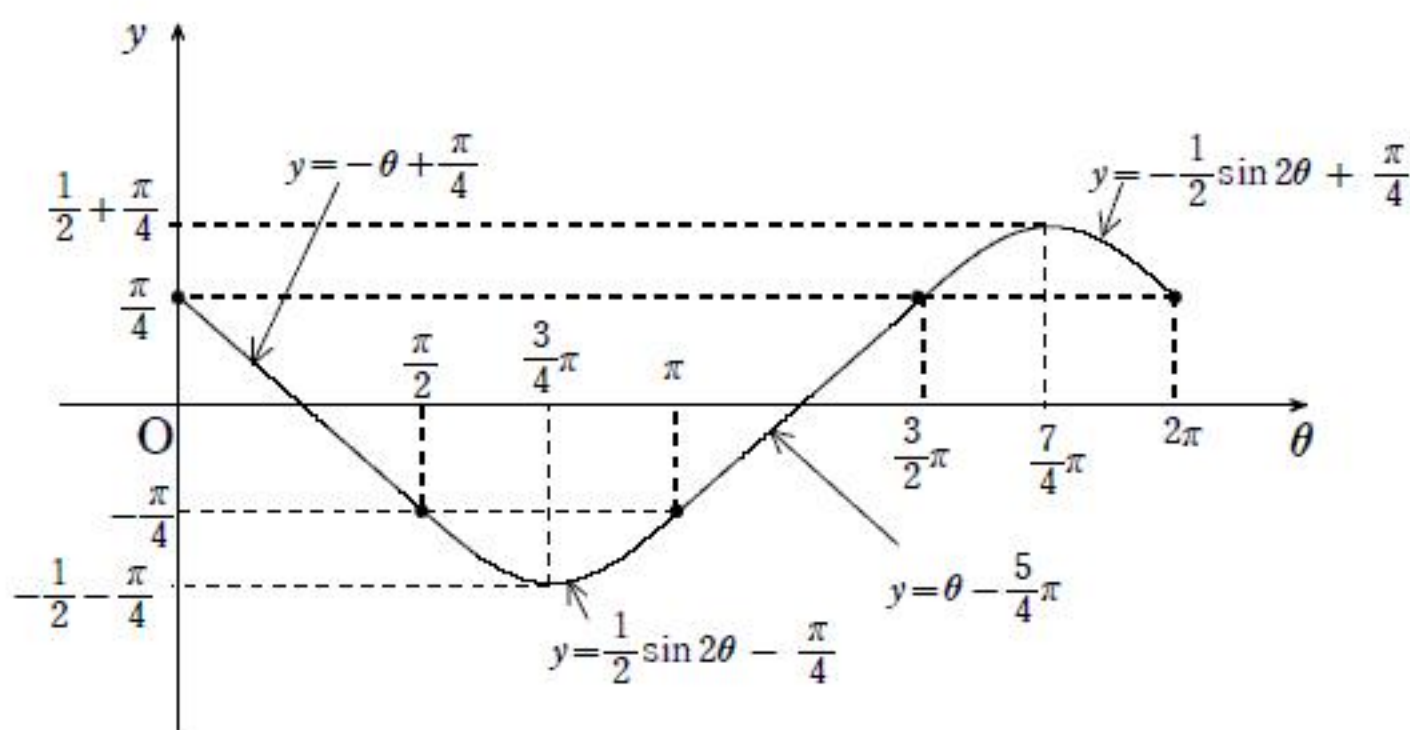
$$\begin{cases} g\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 - \frac{\pi}{2} = C_2 \\ g(\pi) = C_2 = C_3 + \pi \\ g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = C_3 + \frac{3}{2}\pi = C_4 \end{cases}$$

より, $C_2 = -\frac{\pi}{4}$, $C_3 = -\frac{5}{4}\pi$, $C_4 = \frac{\pi}{4}$

よって,

$$g(\theta) = \begin{cases} -\theta + \frac{\pi}{4} & \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{\pi}{4} & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \\ \theta - \frac{5}{4}\pi & \left(\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\right) \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\pi}{4} & \left(\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi\right) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) (2)より, グラフは下のようになる.



.....(答)

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$A^2 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}E = 0$$

よって,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}E \right) A \\ &= -\frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{4}A \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}E \right) - \frac{1}{4}A \\ &= \frac{1}{8}E = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

また,

$$\begin{cases} c_2 = c_1 + \sqrt{a_1 b_1} = 0 \\ c_3 = c_2 + \sqrt{a_2 b_2} = 0 \\ c_4 = c_3 + \sqrt{a_3 b_3} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

であるから,

$$P_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right), P_3 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0 \right), P_4 = \left(\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4} \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad A^3 = \frac{1}{8}E \text{ より, } A^{3k} = (A^3)^k = \frac{1}{8^k}E$$

(ただし, k は 0 以上の整数で, $A^0 = E$ とする)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{3k+1} \\ b_{3k+1} \end{pmatrix} = A^{3k} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{3k+2} \\ b_{3k+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{3k+1} \\ b_{3k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 8^k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{3k+3} \\ b_{3k+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{3k+2} \\ b_{3k+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 8^k} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4 \cdot 8^k} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

また,

$$\begin{aligned} c_{3k+3} &= c_{3k+2} + \sqrt{a_{3k+2} b_{3k+2}} \\ &= c_{3k+2} \\ &= c_{3k+1} + \sqrt{a_{3k+1} b_{3k+1}} \\ &= c_{3k+1} \\ &= c_{3k} + \sqrt{a_{3k} b_{3k}} \\ &= c_{3k} + \frac{1}{4 \cdot 8^{k-1}} \quad \left(\because a_{3k} = b_{3k} = \frac{-1}{4 \cdot 8^{k-1}} \right) \end{aligned}$$

これより, $m \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} c_{3m} &= c_3 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{4 \cdot 8^{k-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \right\}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \right\} \end{aligned}$$

$c_3 = 0$ より, これは $m = 1$ のときも成立する.

$$\therefore c_{3k+3} = c_{3k+2} = c_{3k+1} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^k \right\} \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

以上より

$$\begin{cases} n = 3k+1 \text{ のとき, } P_{3k+1} \left(\frac{1}{8^k}, 0, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^k \right\} \right) \\ n = 3k+2 \text{ のとき, } P_{3k+2} \left(0, \frac{1}{2 \cdot 8^k}, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^k \right\} \right) \quad \dots\dots(\text{答}) \\ n = 3k+3 \text{ のとき, } P_{3k+3} \left(\frac{-1}{4 \cdot 8^k}, \frac{-1}{4 \cdot 8^k}, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^k \right\} \right) \end{cases}$$

(k は 0 以上の整数)

(参照) k を用いずに, P_n を n の式で表すと下のようになる.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} \right) & (n \text{ を } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余るとき}) \\ \left(0, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right\} \right) & (n \text{ を } 3 \text{ で割ると } 2 \text{ 余るとき}) \\ \left(\frac{-1}{2^{n-1}}, \frac{-1}{2^{n-1}}, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right\} \right) & (n \text{ を } 3 \text{ で割る切れるとき}) \end{cases}$$

(1)

さいころを2回投げたとき、出る目の積の一の位は右の表のようになる。よって、

$$\begin{cases} p_2(0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ p_2(1) = \frac{1}{36} \\ p_2(2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{cases} \dots\dots(\text{答})$$

2回目\1回目	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

(2) さいころを $n+1$ 回投げたとき、出る目の積の一の位が 1 となるのは

$$\begin{cases} \textcircled{1} & n \text{ 回投げたとき、出る目の積の一の位が 1 で、} n+1 \text{ 回目に 1 の目が出る} \\ \textcircled{2} & n \text{ 回投げたとき、出る目の積の一の位が 7 で、} n+1 \text{ 回目に 3 の目が出る} \end{cases}$$

の 2 つの場合がある。これより、

$$p_{n+1}(1) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(7) \dots\dots(\text{答})$$

(3) $q_n = p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ とおく。

さいころを $n+1$ 回投げたとき、出る目の積の一の位が「5 以外の奇数」になるのは、 n 回投げたとき、出る目の積の一の位が「5 以外の奇数」で $n+1$ 回目に 1 または 3 の目が出るときであるから、

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$$

これと、 $q_1 = \frac{1}{3}$ より、

$$q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \dots\dots(\text{答})$$

(4) さいころを n 回投げたとき、出る目の積の一の位が奇数である確率 r_n は n 回とも奇数が出る確率であるから、

$$r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これより、

$$\begin{aligned} P_n(5) &= r_n - q_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned} \dots\dots(\text{答})$$