

数 学

(情—自然・理・医・工・農)

2 月 26 日(木) 10:00—12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち問題紙 1 枚、答案紙 4 枚、数学公式集 3 枚)である。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは、退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。
10. 問題④は選択問題である。(A)(B)の 2 題からなるが、いずれか 1 題だけを選択し解答するものとする。
どちらを選択したかを答案紙④の所定の欄に記入せよ。

問題紙

- 1 $a > 0, b > 0$ とする。点 $A(0, a)$ を中心とする半径 r の円が、双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と 2 点 $B(s, t), C(-s, t)$ で接しているとする。ただし、 $s > 0$ とする。ここで、双曲線と円が点 P で接するとは、 P が双曲線と円の共有点であり、かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

- (1) r, s, t を、 a と b を用いて表せ。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ。

- 2 関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$g(\theta) = f(\cos \theta) - f(\sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で定める。

- (1) 導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。
- (2) $g(\theta)$ を求めよ。
- (3) $y = g(\theta)$ のグラフをかけ。

- 3 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して、座標空間の点 P_n の座標 $(a_n, b_n, c_n) (n = 1, 2, 3, \dots)$ を、

$$(a_1, b_1, c_1) = (1, 0, 0),$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad c_{n+1} = c_n + \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) A^3 を求めよ。
- (2) 点 P_2, P_3, P_4 の座標を求めよ。
- (3) 点 P_n の座標を求めよ。

問題4は選択問題である。次の(A)(B)のいずれか一方を選択して解答せよ。どちらを選択したかを答案紙4の所定の欄に記入せよ。

- 4 (A) さいころを投げると、1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) 投げるとき、出る目の積の一の位が j ($j = 0, 1, 2, \dots, 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする。

- (1) $p_2(0), p_2(1), p_2(2)$ を求めよ。
- (2) $p_{n+1}(1)$ を、 $p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。
- (3) $p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ を求めよ。
- (4) $p_n(5)$ を求めよ。

- 4 (B) x, y を正の整数とする。

- (1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ をみたす組 (x, y) をすべて求めよ。
- (2) p を 3 以上の素数とする。 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ をみたす組 (x, y) のうち、 $2x + 3y$ を最小にする (x, y) を求めよ。

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または 0)
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5. $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の 2 点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点:

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. 円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ベクトルと行列)

10. 2 つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ($ad - bc \neq 0$)

(複 素 数)

12. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
13. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
14. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
19. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
20. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
21. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$
22. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
23. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数 列)

24. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$, ($l = a + (n-1)d$)
25. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$34. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log |f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4}\pi a^2 \quad (a > 0), \quad \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (a \neq 0), \quad \int_a^\beta (x - a)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - a)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列 ・ 組 合 せ)

$$40. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, \quad (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$