

- (1) 直線 AB の傾きが 2, $AB = 2\sqrt{5}a$,
 (A の y 座標) > (B の y 座標) より,
 $\overrightarrow{BA} = (2a, 4a)$

同様に, 直線 BC の傾きが $-\frac{1}{2}$, $BC = 2\sqrt{5}b$,

(B の y 座標) > (C の y 座標) より,

$$\overrightarrow{BC} = (4b, -2b)$$

よって, $\overrightarrow{OB} = (x, y)$ とおくと,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = (x + 2a, y + 4a) \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (x + 4b, y - 2b) \end{cases}$$

AC の中点が O であるから,

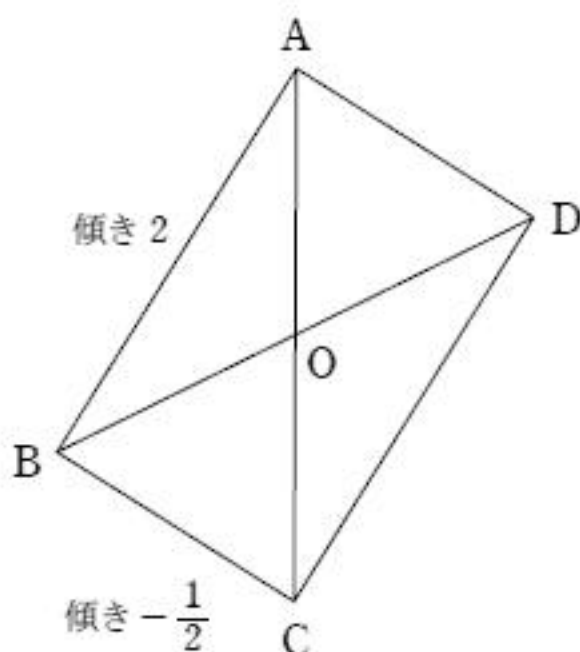
$$\left(\frac{2x + 2a + 4b}{2}, \frac{2y + 4a - 2b}{2} \right) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow x = -a - 2b, y = -2a + b$$

したがって, $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ も利用すると,

$$A(a - 2b, 2a + b), B(-a - 2b, -2a + b),$$

$$C(-a + 2b, -2a - b), D(a + 2b, 2a - b)$$

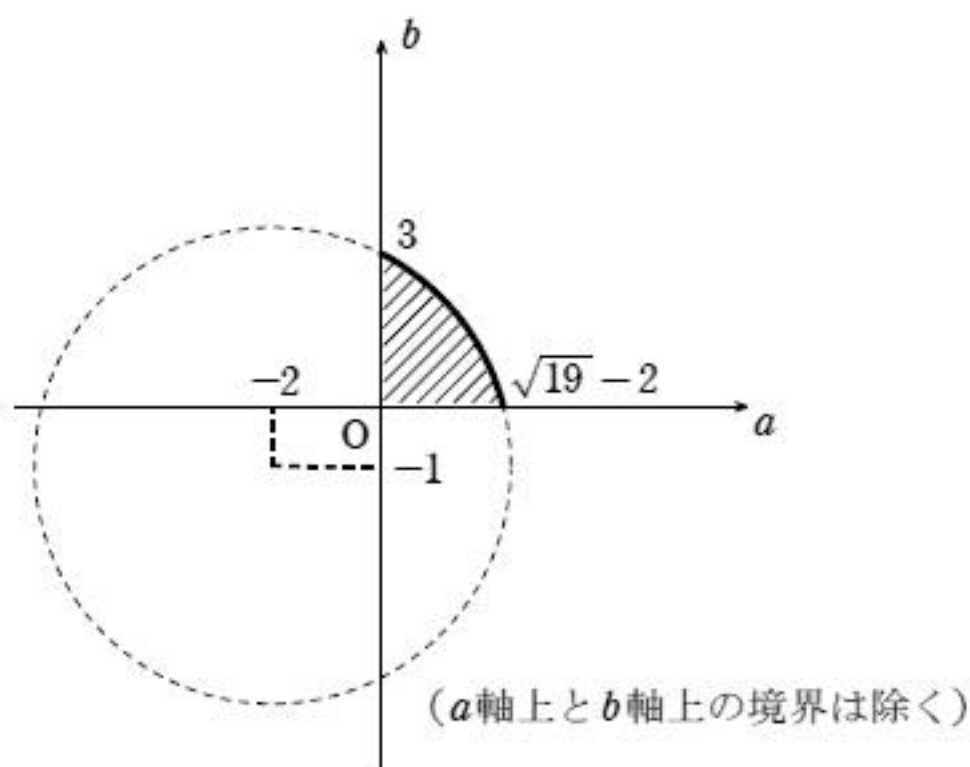


- (2) 4点 A, B, C, D が領域内の点であればよい. 条件は

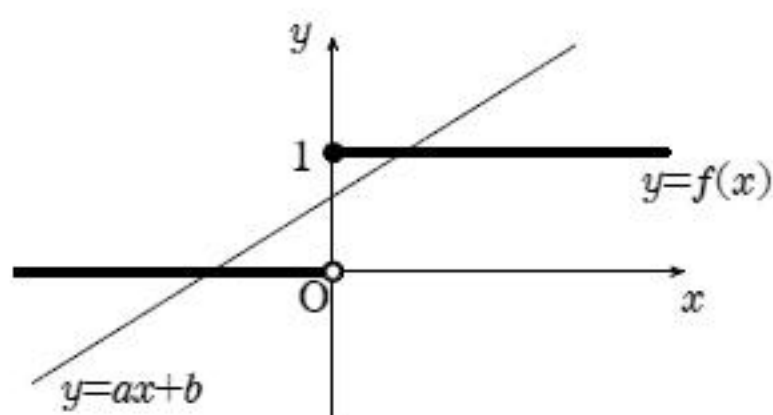
$$\begin{cases} (a - 2b)^2 + (2a + b - 5)^2 \leq 100 \\ (-a - 2b)^2 + (-2a + b - 5)^2 \leq 100 \\ (-a + 2b)^2 + (-2a - b - 5)^2 \leq 100 \\ (a + 2b)^2 + (2a - b - 5)^2 \leq 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2)^2 + (b - 1)^2 \leq 20 \\ (a + 2)^2 + (b - 1)^2 \leq 20 \\ (a + 2)^2 + (b + 1)^2 \leq 20 \\ (a - 2)^2 + (b + 1)^2 \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 2)^2 + (b + 1)^2 \leq 20 \\ (\because a > 0, b > 0) \end{cases}$$

$a > 0, b > 0$ と合わせてこれを図示すると次のようになる.



(1)



方程式

$$ax+b=0 \text{ が } x < 0 \text{ においてちょうど 1 つの解} \dots\dots ①$$

かつ方程式

$$ax+b=1 \text{ が } x \geq 0 \text{ においてちょうど 1 つの解} \dots\dots ②$$

をもてばよい.

(i) $a=0$ のときは明らかに不適.(ii) $a > 0$ のとき

$$① \text{ は } b > 0 \text{ であり, } ② \text{ は } 1-b \geq 0$$

$$\therefore 0 < b \leq 1$$

(iii) $a < 0$ のとき

$$① \text{ は } b < 0 \text{ であり, } ② \text{ は } 1-b \leq 0 \text{ であるからこの場合は不適.}$$

(i), (ii), (iii) より求める答は

$$a > 0 \text{ かつ } 0 < b \leq 1$$

$$(2) \quad g(x) = x^3 + 6px^2 + 9p^2x + q$$

とおくと,

$$g'(x) = 3(x+p)(x+3p)$$

x	$\dots$	$-3p$	$\dots$	$-p$	$\dots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$p > 0$ より, $x > 0$ のとき $g(x)$ は増加関数であるから, $y = g(x)$ と $y = 1 (x \geq 0)$ は高々 1 個の交点しかもたない.

これより, $y = g(x)$ と $y = f(x)$ の交点が 4 個であるためには,

$$\begin{cases} y = g(x) \text{ と } y = 1 (x \geq 0) \text{ の交点が 1 つ} \\ \text{かつ} \\ y = g(x) \text{ と } y = 0 (x < 0) \text{ の交点が 3 つ} \end{cases}$$

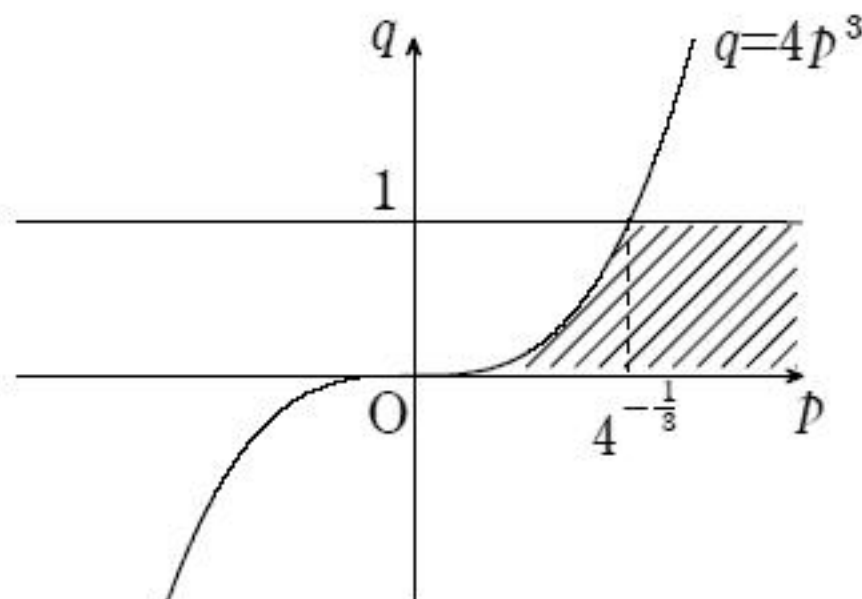
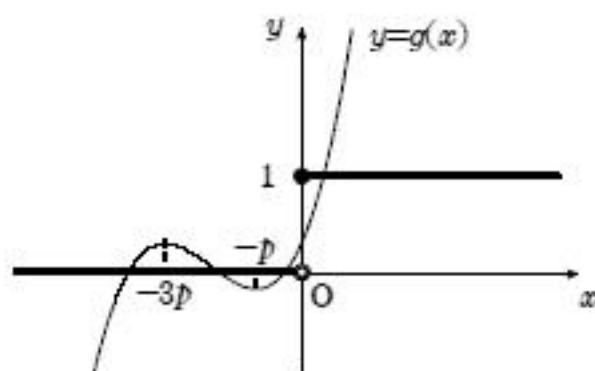
であればよい.

条件は

$$\begin{cases} g(-3p) = q > 0 \\ g(-p) = q - 4p^3 < 0 \\ 0 < g(0) = q \leq 1 \end{cases}$$

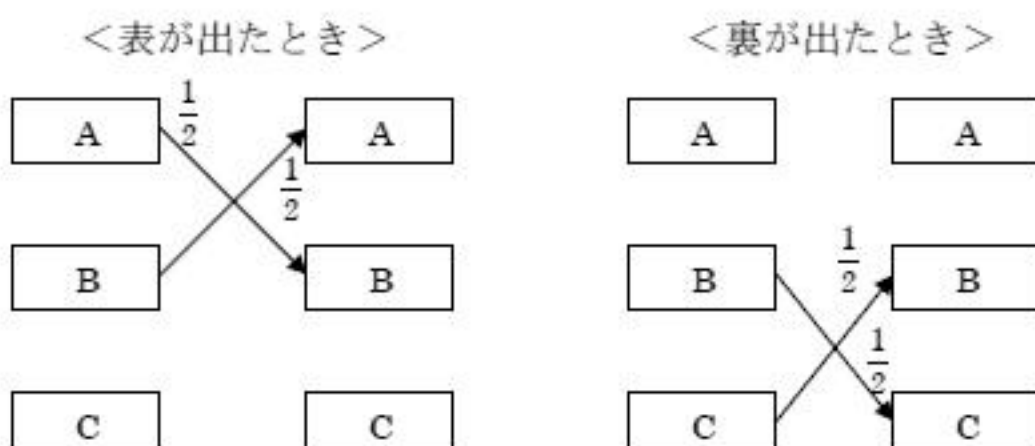
$$\Leftrightarrow 0 < q \leq 1, \quad q < 4p^3$$

これを図示すると次のようになる.



$$\left(\text{境界は } q=1 \text{ かつ } p > 4^{-\frac{1}{3}} \right)$$

$$(1)(2) \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = 0 \quad \dots\dots ① \quad \text{である.}$$



$n+1$ 回後に A が赤玉をもっているのは次の 2 つの場合.

- n 回後に A が赤玉をもっていて, $n+1$ 回目に裏が出る
- n 回後に B が赤玉をもっていて, $n+1$ 回目に表が出る

これより,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \quad \dots\dots ②$$

同様に,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \quad \dots\dots ③$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \quad \dots\dots ④$$

また, ①を②～④に代入することにより,

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4}$$

(3) m を自然数とすると,

$$(*) \quad \begin{cases} a_{2m-1} = b_{2m-1} > c_{2m-1} \\ a_{2m} > b_{2m} = c_{2m} \end{cases}$$

を m に関する数学的帰納法で示す.

(I) $m=1$ のときは (1) より正しい.

(II) $m=k$ のとき正しいと仮定する.

②～④より,

$$\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}b_{2k} \\ b_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k} \\ c_{2k+1} = \frac{1}{2}b_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k} \end{cases}$$

ここで, $a_{2k} > b_{2k} = c_{2k}$ より (帰納法の仮定),

$$a_{2k+1} = b_{2k+1} > c_{2k+1} \quad \dots\dots ⑤ \quad \text{が成立する.}$$

一方, ②～④より,

$$\begin{cases} a_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}b_{2k+1} \\ b_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1} \\ c_{2k+2} = \frac{1}{2}b_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1} \end{cases}$$

⑤を利用すると, $a_{2k+2} > b_{2k+2} = c_{2k+2} \quad \dots\dots ⑥$ が成立する.

以上, ⑤, ⑥より, $m=k+1$ のときも正しい.

(I), (II) よりすべての自然数 m に対し, $(*)$ が成立する.

$$(4) \quad ③ \text{ より } \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) = \frac{1}{2}(1 - b_n)$$

$$\therefore b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

これより, 数列 $\left\{b_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $\frac{1}{6}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$