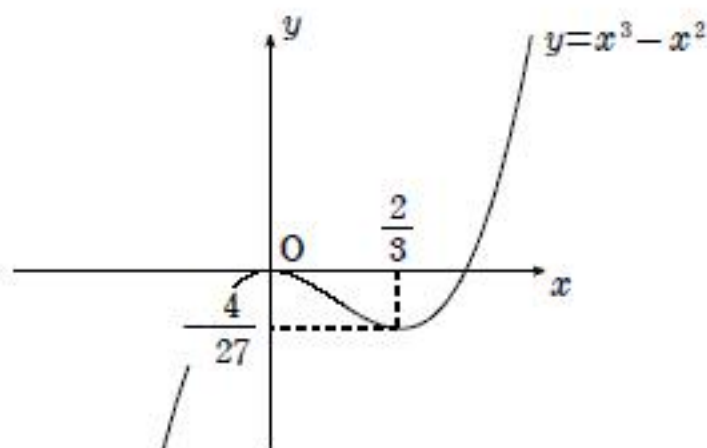


(1) $y = x^3 - x^2$ より, $y' = 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$

これより, 増減表, グラフは次のようになる.

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



(2) 曲線上の点 $(t, t^3 - t^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 2t)(x - t) + t^3 - t^2 \\ &= (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2 \end{aligned}$$

これが $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を通るとき

$$0 = \frac{3}{2}(3t^2 - 2t) - 2t^3 + t^2$$

$$4t^3 - 11t^2 + 6t = 0$$

$$t(4t - 3)(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 0, 2, \frac{3}{4}$$

これより, 求める接線の方程式は

$$y = 0, y = 8x - 12, y = \frac{3}{16}x - \frac{9}{32}$$

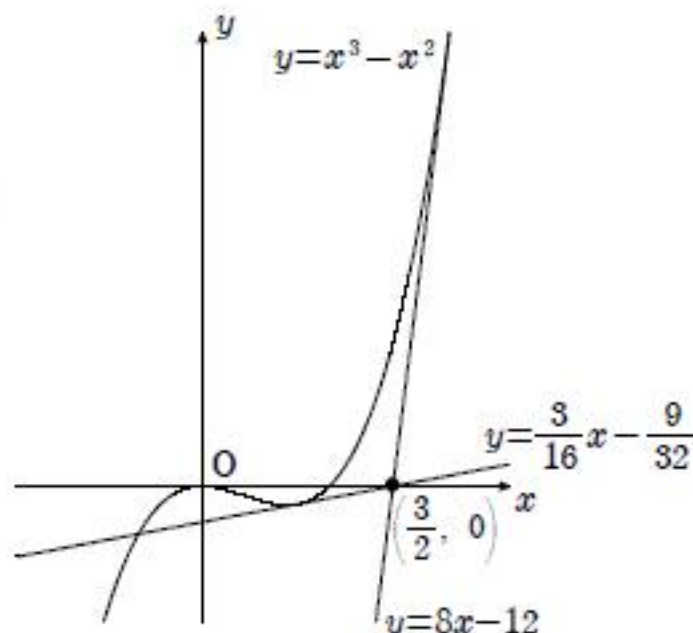
(3) (1), (2) より右図のようになる. ここで,

「 $x^3 - x^2 = p\left(x - \frac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数」

$\iff$ 「 $y = x^3 - x^2$ と $y = p\left(x - \frac{3}{2}\right)$ の共有点の個数」

であるから, 右のグラフより求める答は

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{3}{16}, p > 8 & \cdots \cdots 3 \text{ 個} \\ p = 0, \frac{3}{16}, 8 & \cdots \cdots 2 \text{ 個} \\ p < 0, \frac{3}{16} < p < 8 & \cdots \cdots 1 \text{ 個} \end{cases}$$

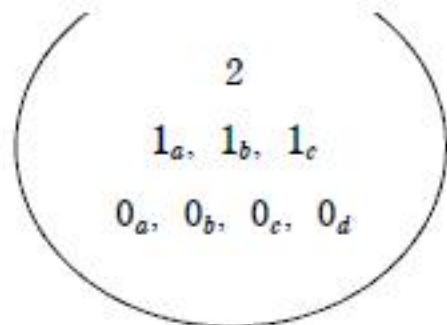


8個の球をすべて区別して考える.

- (1) 合計が2 $\iff$ $\begin{cases} \bullet 2と0を1個ずつ取り出す & \cdots \cdots 4通り \\ \bullet 1を2個取り出す & \cdots \cdots {}_3C_2通り \end{cases}$

であるから, 求める答は

$$\frac{4 + {}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{4}$$



- (2) 余事象は合計が5以上で, これは1を3個, 2を1個取り出すときの1通りしかない.
よって, 求める答は

$$1 - \frac{1}{{}_8C_4} = \frac{69}{70}$$

- (3) 8個の球を区別せずに考える. 取り出した順に

8個の球を左から一列に並べる. このとき,

すべての並べ方は $\frac{8!}{4!3!}$ 通りあり, これらは同様に確からしい.

このうち, 条件を満たさない並べ方は

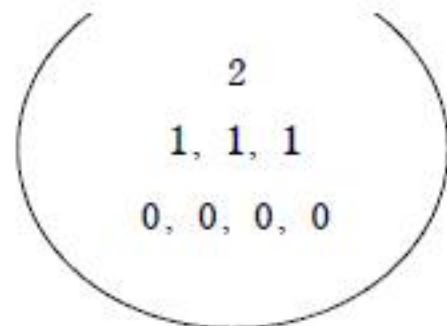
「4個の0より2が左にある並べ方」(例えば 11200010)

であるから, 0と2を同じものとみなして並べることにより

$$\frac{8!}{5!3!} \text{ 通り}$$

これより, 求める答は

$$1 - \frac{\frac{8!}{5!3!}}{\frac{8!}{4!3!}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$



(1) $P(x, y)$ とおく. $OP:AP=1:a$ より

$$a^2 OP^2 = AP^2$$

$$a^2(x^2 + y^2) = (x-1)^2 + y^2 \quad \dots\dots ①$$

(i) $a=1$ のとき

$$① \text{ は } x = \frac{1}{2}$$

(ii) $a \neq 1$ のとき

$$① \text{ は } \left(x - \frac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{1-a^2}\right)^2$$

これより, 求める答は

$$\begin{cases} a=1 \text{ のとき, } x = \frac{1}{2} \text{ (線分 OA の垂直二等分線)} \\ a \neq 1 \text{ のとき, } \left(x - \frac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{1-a^2}\right)^2 \text{ (中心 } \left(\frac{1}{1-a^2}, 0\right), \text{ 半径 } \frac{a}{|1-a^2|} \text{ の円)} \end{cases}$$

(2) $a > 1 > b > 0$ より, (1) と同様に考えると,

$$\begin{cases} OP:AP=1:a \text{ となる点 P の軌跡は 中心 } C\left(\frac{1}{1-a^2}, 0\right), \text{ 半径 } r_1 = \frac{a}{a^2-1} \text{ の円} \\ OP:BP=1:b \text{ となる点 P の軌跡は 中心 } C'\left(0, \frac{1}{1-b^2}\right), \text{ 半径 } r_2 = \frac{b}{1-b^2} \text{ の円} \end{cases}$$

条件を満たす点 P が存在するためには, この 2 円が共有点をもてばよい, すなわち,

$$|r_1 - r_2| \leq CC' \leq r_1 + r_2$$

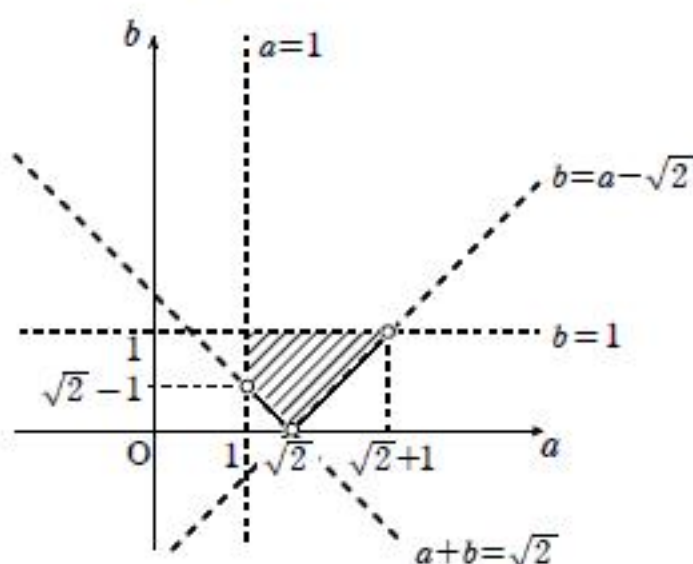
が成り立てばよい. 代入して, 2乗すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a^2-1} - \frac{b}{1-b^2}\right)^2 &\leq \left(\frac{1}{1-a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-b^2}\right)^2 \leq \left(\frac{a}{a^2-1} + \frac{b}{1-b^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} \leq \frac{2ab}{(a^2-1)(1-b^2)} \\ \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \leq \frac{2ab}{(a^2-1)(1-b^2)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (1-b^2) - (a^2-1) \leq 2ab \\ -(1-b^2) + (a^2-1) \leq 2ab \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 \geq 2 \\ (b-a)^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq \sqrt{2} \\ b-a \geq -\sqrt{2} \end{cases} \quad (\because a > 1 > b > 0) \end{aligned}$$

よって, 求める条件は

$$0 < b < 1 < a, a+b \geq \sqrt{2}, b-a \geq -\sqrt{2}$$

これを図示すると次のようになる.



(境界は
 $a=1, b=1, (\sqrt{2}, 0)$ を除く)