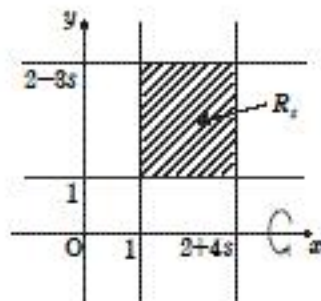


$$\begin{aligned}
 (1) \quad V(s) &= \pi(2-3s)^2(1+4s) - \pi \cdot 1^2 \cdot (1+4s) \\
 &= \pi(9s^2 - 12s + 3)(4s+1) \\
 V'(s) &= \pi\{(18s-12)(4s+1) + 4(9s^2 - 12s + 3)\} \\
 &= \pi(108s^2 - 78s) \\
 &= 6\pi s(18s - 13)
 \end{aligned}$$

これより、 $-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ における増減表は右のようになり、 $V(s)$ は $s=0$ のとき最大値 3π をとる。



s	$(-\frac{1}{4})$	$\dots$	0	$\dots$	$(\frac{1}{3})$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

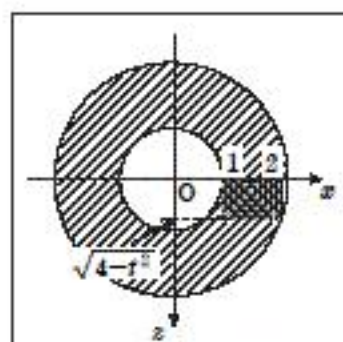
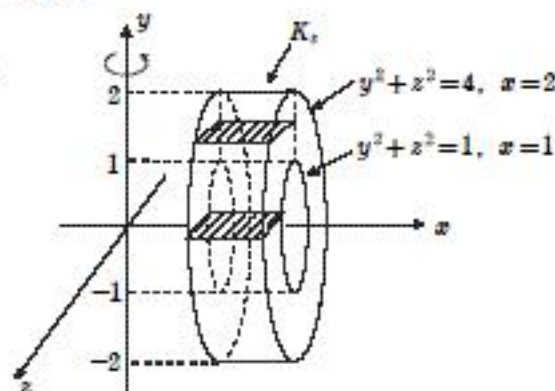
(2) xy 平面に関して K_s は対称であるから、 $z \geq 0$ の部分のみ回転させればよい。

$y=t$ ($0 \leq t \leq 2$) における断面積を $S(t)$ とすると、

(I) $1 \leq t \leq 2$ のとき

断面図は右下の円環になるので

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \pi(8-t^2) - \pi \cdot 1^2 \\
 &= \pi(7-t^2)
 \end{aligned}$$

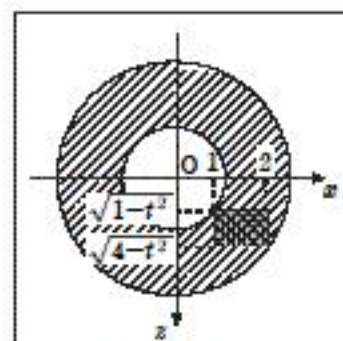


($1 \leq t \leq 2$ のとき)

(II) $0 \leq t \leq 1$ のとき

断面図は右の円環となるので

$$S(t) = \pi(8-t^2) - \pi(2-t^2) = 6\pi$$



($0 \leq t \leq 1$ のとき)

これより、求める体積は

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^2 S(t) dt &= 2 \left\{ \int_0^1 6\pi dt + \int_1^2 \pi(7-t^2) dt \right\} \\
 &= 2 \left\{ 6\pi + \pi \left[7t - \frac{1}{3}t^3 \right]_1^2 \right\} \\
 &= \frac{64}{3}\pi
 \end{aligned}$$

(1) A_0, A_1 は逆行列をもたない, A_2 が逆行列をもつのは,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の2つあるので, 1が加わる順番も考慮すると, $2 \times 2 = 4$ (通り). $\therefore p_2 = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$

A_0, A_1, A_2 が逆行列をもたず, A_3 が逆行列をもつのは次の2つの場合がある.

(I) A_2 が $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のときこの場合は4通りある.

$$\left(\begin{array}{l} \text{例} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

(II) A_2 が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のときこの場合は $4 \times 2 \times 2 = 16$ (通り).

$$\left(\begin{array}{l} \text{例} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

これより,

$$p_3 = \frac{4+16}{4^3} = \frac{5}{16}$$

(2) $n-1$ 回のすべてのとり出し方は 4^{n-1} 通りある. このうち, 第1行の成分が
いずれも正で第2行の成分がいずれも0であるものは $2^{n-1} - 2$ 通り.

$$q_{n-1} = \frac{2^{n-1} - 2}{4^{n-1}}$$

(3) a, b は正の数とする (ただし, $a+b=n-1$).

$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ が逆行列をもたず, A_n が逆行列をもつのは次の場合である.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \begin{array}{l} \boxed{n-1 \text{ 回}} \quad \boxed{n \text{ 回目}} \\ \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (2, 2) \text{ が出る} \\ \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (2, 1) \text{ が出る} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 2) \text{ が出る} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 1) \text{ が出る} \end{array} \end{array}$$

この場合は4通りある.

$$\begin{array}{ll} \text{(II)} & \begin{array}{l} \boxed{n-1 \text{ 回}} \quad \boxed{n \text{ 回目}} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (2, 1) \text{ または } (2, 2) \text{ が出る} \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 2) \text{ または } (2, 2) \text{ が出る} \\ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow (1, 1) \text{ または } (2, 1) \text{ が出る} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow (1, 1) \text{ または } (1, 2) \text{ が出る} \end{array} \end{array}$$

この場合は(2)を利用すると,
 $4 \times (2^{n-1} - 2) \times 2$
 $= 8(2^{n-1} - 2)$ 通りある.

これより,

$$p_n = \frac{4 + 8(2^{n-1} - 2)}{4^n} = \frac{2^n - 3}{4^{n-1}}$$

(コメント)

A_n の成分のうち3つが0でないものは (例えば $A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$), 必ず逆行列をもつ.

よって, $A_{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d が正の数) となる行列は, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ のうち
少なくとも一つは逆行列をもつので, 上の場合分けでは登場しない.

(1) $P(x, y)$ とおく.

$$OP:AP=1:a$$

$$a^2 OP^2 = AP^2$$

$$a^2(x^2+y^2)=(x-1)^2+y^2 \quad \dots\dots ①$$

(i) $a=1$ のとき

$$① \text{ は } x = \frac{1}{2}$$

(ii) $a \neq 1$ のとき

$$① \text{ は } (1-a^2)x^2 - 2x + (1-a^2)y^2 + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(1-a^2)^2}$$

これより、求める答は

$$(\star) \begin{cases} a=1 \text{ のとき, } x = \frac{1}{2} \text{ (線分 OA の垂直二等分線)} \\ a \neq 1 \text{ のとき, } \left(x - \frac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(1-a^2)^2} \text{ (中心 } \left(\frac{1}{1-a^2}, 0\right), \text{ 半径 } \frac{a}{|1-a^2|} \text{ の円)} \end{cases}$$

(2) (1)と同様に

$OP:BP=1:b$ となる点 P の軌跡は

$$(\star\star) \begin{cases} b=1 \text{ のとき, } y = \frac{1}{2} \\ b \neq 1 \text{ のとき, } x^2 + \left(y - \frac{1}{1-b^2}\right)^2 = \frac{b^2}{(1-b^2)^2} \end{cases}$$

よって、 $OP:AP:BP=1:a:b$ を満たす点 P が存在するためには、 $(\star)$ で定義される図形と $(\star\star)$ で定義される図形が共有点をもてばよい。

case1 $a=1, b=1$ のとき

この場合は明らかに交わる。

case2 $a=1, b \neq 1$ のとき

$$x = \frac{1}{2} \text{ と } x^2 + \left(y - \frac{1}{1-b^2}\right)^2 = \frac{b^2}{(1-b^2)^2} \text{ が交わる条件は}$$

$$\frac{b}{|1-b^2|} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |b^2 - 1| \leq 2b$$

$$\Leftrightarrow -2b \leq b^2 - 1 \leq 2b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2b - 1 \geq 0 \\ b^2 - 2b - 1 \leq 0 \end{cases}$$

これを解いて、

$$-1 + \sqrt{2} \leq b \leq 1 + \sqrt{2} \quad (\text{ただし, } b \neq 1)$$

case3 $b=1, a \neq 1$ のとき

$$\text{case2 と同様に, } -1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2} \quad (\text{ただし, } a \neq 1)$$

case4 $a \neq 1, b \neq 1$ のとき

2円が交わる条件は、

$$\left| \frac{a}{|1-a^2|} - \frac{b}{|1-b^2|} \right| \leq \left\{ \frac{1}{|1-a^2|} \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{|1-b^2|} \right\}^2 \leq \left(\frac{a}{|1-a^2|} + \frac{b}{|1-b^2|} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} \leq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|} \\ -\left(\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} \right) \leq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|} \end{cases}$$

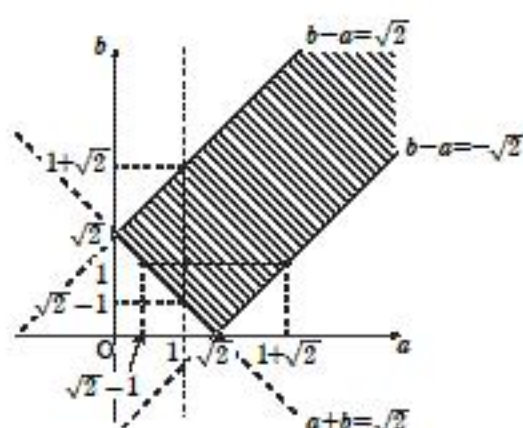
$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} \right| \leq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|}$$

$$\Leftrightarrow |a^2 + b^2 - 2| \leq 2ab$$

$$\Leftrightarrow -2ab \leq a^2 + b^2 - 2 \leq 2ab$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 \geq 2 \\ (b-a)^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq b-a \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

case1 ~ case4 を図示すると次のようになる。



$$(\text{答}) \begin{cases} a > 0, b > 0, a+b \geq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq b-a \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

(境界は
(0, $\sqrt{2}$) と ($\sqrt{2}$, 0) を除く)

(1) 方程式 $x^2+ax+a=0$ が整数解をもつので、それを m とすると、

$$m^2+am+a=0$$

$$\therefore a = \frac{-m^2}{m+1} = -m+1 + \frac{-1}{m+1}$$

ここで、 a, m は整数であるから、 $m+1$ は -1 の約数、すなわち $m+1 = \pm 1$ でなければならない。よって、 $m=0, -2$ 代入すると $a=0, 4$

$a > 0$ であるから、求める答は $a=4$

$$(2) \begin{cases} x^2+ax+b=0 \text{ の解を } p, q \\ x^2+bx+a=0 \text{① の解を } m, n \end{cases}$$

とおく。解と係数の関係より

$$p+q=-a, pq=b \text{②}$$

よって、 $x^2+ax+b=0$ が整数解をもてば、 $p+q=-a$ より、 p, q は両方とも整数である。

また、 $a > 0, b > 0$ より、 p, q は共に負の整数である。同様に m, n も負の整数である。②を

①に代入すると、①は

$$x^2+pqx-(p+q)=0 \text{③}$$

$f(x)=x^2+pqx-(p+q)$ とおく。 $p \leq q, m \leq n$ としてよい。

このとき、 $f(0)=-(p+q) > 0$ より $f(-1) \geq 0$ が必要条件。

($\because$) もし、 $f(-1) < 0$ とすると、 $f(0) > 0$ より、方程式 $f(x)=0$ は $-1 < x < 0$ に解をもつことになり、2解が共に整数に反する。

よって、

$$1-pq-(p+q) \geq 0$$

$$pq+(p+q)-1 \leq 0$$

$$(p+1)(q+1) \leq 2$$

ここで、 p, q は負の整数であるから、 $p \leq q$ に注意すると

$$(p+1, q+1) = (0, 0), (r, 0), (-1, -1), (-2, -1)$$

(ただし、 r は任意の負の整数)

の4つの場合がある。

case1 $p=-1, q=-1$ のとき

このとき、 $a=2, b=1$ となり、 $x^2+bx+a=0$ が整数解をもたないから不適。

case2 $p=-2, q=-2$ のとき

このとき、 $a=4, b=4$ となり、 $a > b$ に反するから不適。

case3 $p=-3, q=-2$ のとき

このとき、 $a=5, b=6$ となり、 $a > b$ に反するから不適。

case4 $p=-1+r, q=-1$ のとき

このとき、③は $x^2+(1-r)x+(2-r)=0$

$$\text{解と係数の関係より } \begin{cases} m+n=-1+r & \text{.....④} \\ mn=2-r & \text{.....⑤} \end{cases}$$

⑤+④より

$$mn+m+n=1$$

$$(m+1)(n+1)=2$$

m, n は、負の整数で $m \leq n$ より、これを満たすのは、 $m+1=-2, n+1=-1$ のみ。

よって、 $(m, n)=(-3, -2)$ となり、 $r=-4, (p, q)=(-5, -1), (a, b)=(6, 5)$

逆に $(a, b)=(6, 5)$ のとき、方程式 $x^2+6x+5=0, x^2+5x+6=0$ はそれぞれ整数解をもつので逆を満たす。

以上、case1 ~ case4 より求める答は

$$(a, b)=(6, 5)$$