

- (1) $\overrightarrow{PQ} = (s-a, t-b)$ と、 l の方向ベクトル $\vec{d} = (1, h)$ は

垂直なので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d} &= 0 \\ (s-a) \cdot 1 + (t-b)h &= 0 \\ \therefore s + ht &= a + hb \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

また、線分 PQ の中点 $\left(\frac{a+s}{2}, \frac{b+t}{2}\right)$ は l 上の点なので、

$$\begin{aligned}\frac{b+t}{2} &= h \cdot \frac{a+s}{2} + 1 \\ \therefore hs - t &= -ah + b - 2 \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

①、②を s, t の連立方程式とみなして解くことにより、

$$s = \frac{(1-h^2)a + 2bh - 2h}{h^2 + 1}, \quad t = \frac{2ah + (h^2 - 1)b + 2}{h^2 + 1}$$

- (2) (1)において、 $a = b = 0$ とすることにより、

$$A\left(\frac{-2h}{h^2 + 1}, \frac{2}{h^2 + 1}\right)$$

これより、

$$\begin{aligned}OA &= \frac{1}{h^2 + 1} \sqrt{(-2h)^2 + 2^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{h^2 + 1}}\end{aligned}$$

ここで、 $-1 \leq h \leq 1$ より、

$$1 \leq h^2 + 1 \leq 2$$

であるから、

$$\sqrt{2} \leq OA \leq 2$$

- (3) $A = (x, y)$ とおくと、

$$x = \frac{-2h}{h^2 + 1} \quad \dots\dots ③, \quad y = \frac{2}{h^2 + 1} \quad \dots\dots ④$$

$y > 0$ より、③÷④を計算すると、

$$h = -\frac{x}{y}$$

よって、④に代入すると、

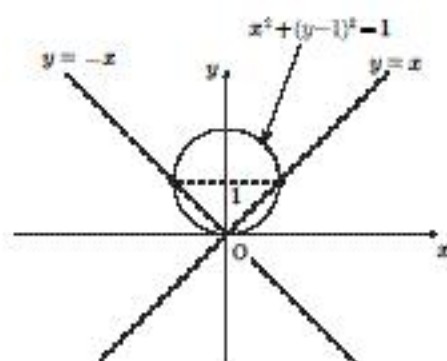
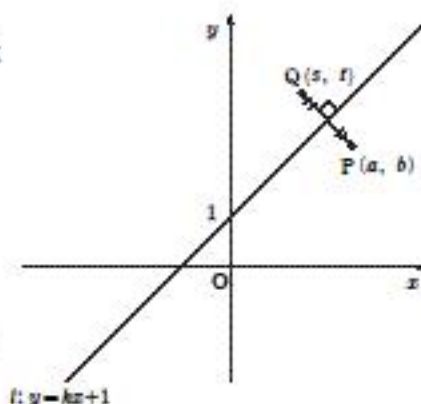
$$\begin{aligned}y(h^2 + 1) &= 2 \\ \Leftrightarrow y^2(h^2 + 1) &= 2y \quad (\because y > 0) \\ \Leftrightarrow y^2 \left\{ \left(-\frac{x}{y}\right)^2 + 1 \right\} &= 2y \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2y \\ \therefore x^2 + (y-1)^2 &= 1 \quad \dots\dots ⑤\end{aligned}$$

ただし、 $-1 \leq h \leq 1$ なので、

$$\begin{aligned}-1 &\leq -\frac{x}{y} \leq 1 \\ y \geq x \geq -y \quad (\because y > 0) \\ \therefore y \geq x \text{ かつ } y &\geq -x \quad \dots\dots ⑥\end{aligned}$$

よって、点 A の軌跡は⑤かつ⑥であるから、 C は右図の円弧となる。したがって、 C と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積は、半円の面積であるから、

$$\frac{1}{2}\pi$$



- (1) 3回とも j 以上 $j+k$ 以下のカードを取り出せばよいので、求める確率は、

$$\left(\frac{k+1}{n}\right)^3$$

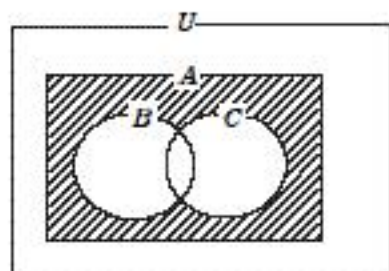
(2)



- A : 3回とも j 以上 $j+k$ 以下のカードを取り出す事象
 B : 3回とも $j+1$ 以上 $j+k$ 以下のカードを取り出す事象
 C : 3回とも j 以上 $j+k-1$ 以下のカードを取り出す事象

とする。求める確率を P_k とおくと、

$$\begin{aligned}
 P_k &= P(A) - P(B \cup C) \\
 &= P(A) - \{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \\
 &= P(A) - P(B) - P(C) + P(B \cap C) \\
 &= \left(\frac{k+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 \\
 &= \frac{6k}{n^3}
 \end{aligned}$$



<(2)の別解>

$X=j, Y=j+k$ となるのは、次の3つの場合しかない。

- (i) $j, j, j+k$ のカードを取り出す
 (ii) $j, j+k, j+k$ のカードを取り出す
 (iii) $j, j+i, j+k$ のカードを取り出す ($i=1, 2, 3, \dots, k-1$)

(i), (ii) については、取り出す順番を考えると3通りずつある。(iii)は、 i の選び方が $k-1$ 通りあり、そのおのおのについて、取り出す順番が3!通りあるので、 $6(k-1)$ 通りある。

したがって、求める答は、

$$P_k = \frac{3+3+6(k-1)}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

- (3) $Y-X=s$ となるのは、

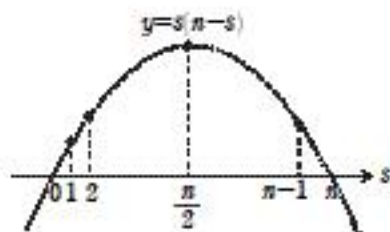
$$(X, Y) = (1, s+1), (2, s+2), (3, s+3), \dots, (n-s, n)$$

の $n-s$ の場合があり、その各々の確率は(2)で求めた P_s に等しい。

$$\begin{aligned}
 \therefore P(s) &= (n-s) \times P_s \\
 &= \frac{6s(n-s)}{n^3}
 \end{aligned}$$

- (4) 右図のような2次関数上の点列を考えるこ

とにより、 n が偶数であるから、 $s = \frac{n}{2}$ のとき $s(n-s)$ は最大となり、このとき $P(s)$ も最大である。



$$(1) \text{ 二項定理より, } (x-1)^{101} = \sum_{k=0}^{101} {}_{101}C_k x^k (-1)^{101-k}$$

この和の中で、 x^2 の項は、 $k=2$ のときであるから、

$${}_{101}C_2 x^2 (-1)^{99} = -5050x^2$$

したがって、求める答は、 -5050

(2) 二項定理より、

$$\begin{aligned} & (p-1)^m \\ &= p^m + {}_m C_1 p^{m-1}(-1) + {}_m C_2 p^{m-2}(-1)^2 + \cdots + {}_m C_{m-1} p(-1)^{m-1} + (-1)^m \end{aligned}$$

m は奇数であるから、

$$\begin{aligned} & (p-1)^m + 1 \\ &= p^m + {}_m C_1 p^{m-1}(-1) + {}_m C_2 p^{m-2}(-1)^2 + \cdots + {}_m C_{m-1} p(-1)^{m-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ &= p \{ p^{m-1} + {}_m C_1 p^{m-2}(-1) + {}_m C_2 p^{m-3}(-1)^2 + \cdots + {}_m C_{m-1} (-1)^{m-1} \} \end{aligned}$$

よって、 p で割り切れる。

(3) r についての数学的帰納法で示す。

(I) $r=1$ のとき

このとき、 $s=m$ であり、 m は奇数なので、

$$\begin{aligned} 2^s + 1 &= (3-1)^m + 1 \\ &= \{ 3^m + {}_m C_1 3^{m-1}(-1) + \cdots + {}_m C_{m-1} 3(-1)^{m-1} + (-1)^m \} + 1 \\ &= 3 \{ 3^{m-1} + {}_m C_1 3^{m-2}(-1) + \cdots + {}_m C_{m-1} (-1)^{m-1} \} \end{aligned}$$

これは、3で割り切れるので $r=1$ のときは正しい。

(II) $r=k$ のとき正しい。すなわち、 $s=3^{k-1}m$ とすると、 2^s+1 が 3^k で割りきれると仮定する。このとき、

$$2^s + 1 = 3^k q$$

と表せる (q は整数)。ここで、 $s_1 = 3^k m$ とし、 $2^{s_1} + 1$ が 3^{k+1} で割り切れることを示す。

$$\begin{aligned} 2^{s_1} + 1 &= 2^{3s} + 1 \\ &= (2^s + 1)^3 - 3 \cdot 2^s (2^s + 1) \\ &= (3^k q)^3 - 3 \cdot 2^s \cdot 3^k q \\ &= 3^{k+1} (3^{2k-1} q^3 - 2^s q) \end{aligned}$$

であるから、 $2^{s_1} + 1$ は 3^{k+1} で割り切れる。

したがって、 $r=k+1$ のときも正しい。

以上、(I)、(II)より、 $s=3^{r-1}m$ のとき、 2^s+1 は 3^r で割り切れることが示された。