

(1) $y' = 3x^2 - a^2$ より, l の方程式は

$$y = (3t^2 - a^2)(x - t) + t^3 - a^2t$$

$$\therefore y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 \quad \dots\dots(*)$$

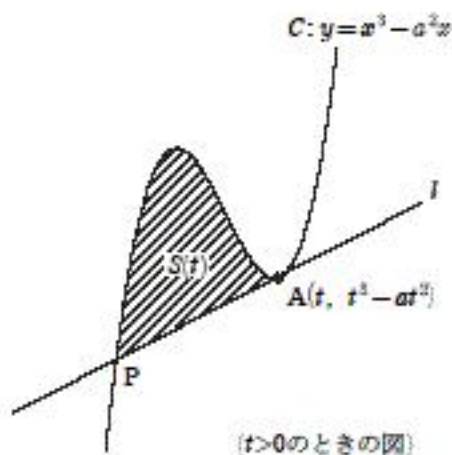
ここで, 連立方程式

$$\begin{cases} y = x^3 - a^2x & \dots\dots① \\ y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 & \dots\dots② \end{cases}$$

を考える. ①-②より,

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$

$$(x - t)^2(x + 2t) = 0$$



これより, C と l の点 A 以外の交点 P の座標は $(-2t, -3t^3 + 2a^2t)$ とわかる.

したがって,

$$S(t) = \int_{-2t}^t [(x^3 - a^2x) - \{(3t^2 - a^2)x - 2t^3\}] dx$$

$$= \int_{-2t}^t (x - t)^2(x + 2t) dx \quad \dots\dots(\star)$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x - t)^3(x + 2t) \right]_{-2t}^t - \int_{-2t}^t \frac{1}{3}(x - t)^3 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{12}(x - t)^4 \right]_{-2t}^t = \frac{27}{4}t^4$$

(注) $-2t > t$ のときも含めて, $S(t)$ は $(\star)$ で表される. 実際, $-2t > t$ のとき, l と C の上下は逆となり,

$$S(t) = \int_t^{-2t} [\{(3t^2 - a^2)x - 2t^3\} - (x^3 - a^2x)] dx$$

$$= \int_{-2t}^t (x - t)^2(x + 2t) dx$$

(2) $(*)$ が点 $B(2a, b)$ を通るとき,

$$b = 2a(3t^2 - a^2) - 2t^3$$

$$= -2t^3 + 6at^2 - 2a^3 \quad \dots\dots③$$

が成り立つ. ③の異なる実数解の個数を調べればよい.

$$f(t) = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3$$

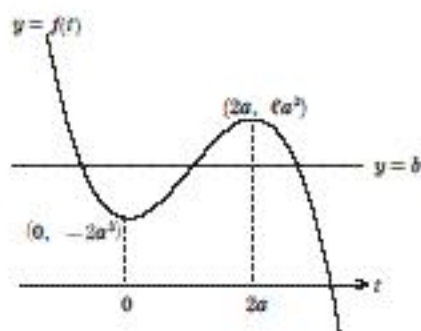
とおくと,

$$f'(t) = -6t(t - 2a)$$

より, $y = f(t)$ のグラフは右図のようになる.

これと, $y = b$ との交点の数を調べることににより, 求める答は

$$\begin{cases} b > 6a^3, b < -2a^3 & \dots\dots 1 \text{ 本} \\ b = 6a^3, b = -2a^3 & \dots\dots 2 \text{ 本} \\ -2a^3 < b < 6a^3 & \dots\dots 3 \text{ 本} \end{cases}$$



(3) $b = -2a^3$ とき, ③は

$$-2t^3 + 6at^2 = 0$$

$$t^2(t - 3a) = 0$$

$$\therefore t = 0, 3a$$

$t = 0$ のときの接線が原点を通るので, この場合は不適である.

よって, $b = 6a^3$ とわかる. このとき, ③は,

$$6a^3 = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3$$

$$t^3 - 3at^2 + 4a^3 = 0$$

$$(t - 2a)^2(t + a) = 0$$

$$\therefore t = 2a, -a$$

これより, $S_1 = S(2a), S_2 = S(-a)$ とわかり,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S(2a)}{S(-a)} = \frac{\frac{27}{4}(2a)^4}{\frac{27}{4}(-a)^4} = 16$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_1(x) &= \int_{-x}^x t e^t dt + (x e^x)' \\
 &= [(t-1)e^t]_{-x}^x + (x+1)e^x \\
 &= 2x e^x + (x+1)e^{-x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad g(-x) &= \int_x^{-x} (at+b)e^t dt \\
 &= -\int_{-x}^x (at+b)e^t dt = -g(x)
 \end{aligned}$$

より, $g(x)$ は奇関数である. したがって,

$$\int_{-c}^c g(x) dx = 0$$

(3) まず, m を 0 以上の実数とすると, $f_{2m}(x) = (a_m x + b_m) e^x$ と表されることを m に関する数学的帰納法で示す (a_m, b_m は定数).

(I) $m=0$ のとき

$a_0=1, b_0=0$ と定めることにより, $m=0$ のときは正しい.

(II) $m=k$ のとき正しい, すなわち,

$$f_{2k}(x) = (a_k x + b_k) e^x$$

と表されると仮定する (a_k, b_k は定数). このとき,

$$f_{2k+1}(x) = \int_{-x}^x (a_k t + b_k) e^t dt + f_{2k}'(x)$$

ここで,

$$G(x) = \int_{-x}^x (a_k t + b_k) e^t dt$$

とおくと,

$$f_{2k+1}(x) = G(x) + f_{2k}'(x)$$

であり, (2) より,

$$\int_{-x}^x G(x) dx = 0$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}
 f_{2k+2}(x) &= \int_{-x}^x (G(t) + f_{2k}'(t)) dt + f_{2k+1}'(x) \\
 &= [f_{2k}(t)]_{-x}^x + \left\{ \int_{-x}^x (a_k t + b_k) e^t dt + f_{2k}'(x) \right\} \\
 &= [(a_k t + b_k) e^t]_{-x}^x + (a_k x + b_k) e^x + (-a_k x + b_k) e^{-x} + (a_k x + 2a_k + b_k) e^x \\
 &= (3a_k x + 2a_k + 3b_k) e^x
 \end{aligned}$$

よって, $a_{k+1} = 3a_k, b_{k+1} = 3b_k + 2a_k$ と定めることにより, $m=k+1$ のときも正しい.

(I), (II) より, m を 0 以上の整数とすると,

$$f_{2m}(x) = (a_m x + b_m) e^x$$

と表されることが示された. さらに,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ b_{n+1} = 3b_n + 2a_n & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases} \quad a_0 = 1, b_0 = 0$$

とわかる. ②より,

$$a_n = 3^n$$

③に代入して,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= 3b_n + 2 \cdot 3^n \\
 \frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} &= \frac{b_n}{3^n} + \frac{2}{3} \\
 \therefore \frac{b_n}{3^n} &= \frac{b_0}{3^0} + \frac{2}{3} n = \frac{2}{3} n
 \end{aligned}$$

したがって,

$$b_n = 2n \cdot 3^{n-1}$$

求める答は

$$f_{2n}(x) = (3^n x + 2n \cdot 3^{n-1}) e^x$$

- (1) 3回とも j 以上 $j+k$ 以下のカードを取り出せばよいので、求める確率は、

$$\left(\frac{k+1}{n}\right)^3$$

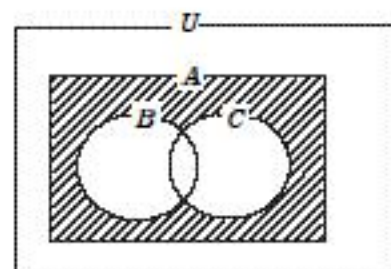
- (2)



- A : 3回とも j 以上 $j+k$ 以下のカードを取り出す事象
 B : 3回とも $j+1$ 以上 $j+k$ 以下のカードを取り出す事象
 C : 3回とも j 以上 $j+k-1$ 以下のカードを取り出す事象

とする。求める確率を P_k とおくと、

$$\begin{aligned}
 P_k &= P(A) - P(B \cup C) \\
 &= P(A) - \{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \\
 &= P(A) - P(B) - P(C) + P(B \cap C) \\
 &= \left(\frac{k+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 \\
 &= \frac{6k}{n^3}
 \end{aligned}$$



<(2)の別解>

$X=j, Y=j+k$ となるのは、次の3つの場合しかない。

- (i) $j, j, j+k$ のカードを取り出す
 (ii) $j, j+k, j+k$ のカードを取り出す
 (iii) $j, j+i, j+k$ のカードを取り出す ($i=1, 2, 3, \dots, k-1$)

(i), (ii) については、取り出す順番を考えると3通りずつある。(iii)は、 i の選び方が $k-1$ 通りあり、そのおのおのについて、取り出す順番が3!通りあるので、 $6(k-1)$ 通りある。

したがって、求める答は、

$$P_k = \frac{3+3+6(k-1)}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

- (3) $Y-X=s$ となるのは、

$$(X, Y) = (1, s+1), (2, s+2), (3, s+3), \dots, (n-s, n)$$

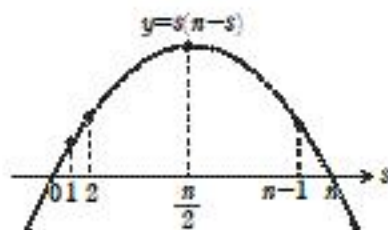
の $n-s$ の場合があり、その各々の確率は(2)で求めた P_2 に等しい。

$$\begin{aligned}
 \therefore P(s) &= (n-s) \times P_2 \\
 &= \frac{6s(n-s)}{n^3}
 \end{aligned}$$

- (4) 右図のような2次関数上の点列を考えること

により、 n が偶数であるから、 $s = \frac{n}{2}$ のとき

$s(n-s)$ は最大となり、このとき $P(s)$ も最大である。



$$(1) \text{ 二項定理より, } (x-1)^{101} = \sum_{k=0}^{101} {}_{101}C_k x^k (-1)^{101-k}$$

この和の中で, x^2 の項は, $k=2$ のときであるから,

$${}_{101}C_2 x^2 (-1)^{99} = -5050 x^2$$

したがって, 求める答は, -5050

<(1)の別解>

$f(x) = (x-1)^{101}$ とおくと, 求める答は $\frac{f''(0)}{2!}$ である. ここで,

$$f'(x) = 101(x-1)^{100}$$

$$f''(x) = 10100(x-1)^{99}$$

より,

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{-10100}{2} = -5050$$

(2) 二項定理より,

$$\begin{aligned} (p-1)^m &= p^m + {}_m C_1 p^{m-1}(-1) + {}_m C_2 p^{m-2}(-1)^2 + \dots + {}_m C_{m-1} p(-1)^{m-1} + (-1)^m \end{aligned}$$

m は奇数であるから,

$$\begin{aligned} (p-1)^m + 1 &= p^m + {}_m C_1 p^{m-1}(-1) + {}_m C_2 p^{m-2}(-1)^2 + \dots + {}_m C_{m-1} p(-1)^{m-1} \dots \dots \textcircled{1} \\ &= p \{ p^{m-1} + {}_m C_1 p^{m-2}(-1) + {}_m C_2 p^{m-3}(-1)^2 + \dots + {}_m C_{m-1} (-1)^{m-1} \} \end{aligned}$$

よって, p で割り切れる.

(3) m を p で割ったときの商を q , 余りを r とおく. 仮定より, $r \neq 0$ である ($0 < r < p$). このとき,

$$m = pq + r$$

ここで, ①より,

$$\begin{aligned} (p-1)^m + 1 &= p^m + {}_m C_1 p^{m-1}(-1) + {}_m C_2 p^{m-2}(-1)^2 + \dots + {}_m C_{m-2} p^2(-1)^{m-2} + mp(-1)^{m-1} \\ &= p^m + {}_m C_1 p^{m-1}(-1) + {}_m C_2 p^{m-2}(-1)^2 + \dots + {}_m C_{m-2} p^2(-1)^{m-2} + (pq+r)p \\ &\quad (\because m \text{ は奇数}) \\ &= p^2 \{ p^{m-2} + {}_m C_1 p^{m-3}(-1) + {}_m C_2 p^{m-4}(-1)^2 + \dots + {}_m C_{m-2} (-1)^{m-2} + q \} + rp \end{aligned}$$

このとき, $0 < rp < p^2$

であるから, $(p-1)^m + 1$ を p^2 で割った余りは, $rp (\neq 0)$ である. したがって, $(p-1)^m + 1$ は p^2 で割り切れない.

(4) r についての数学的帰納法で示す.

(I) $r=1$ のとき

このとき, $s=m$ であり, m は奇数なので,

$$\begin{aligned} 2^s + 1 &= (3-1)^m + 1 \\ &= \{ 3^m + {}_m C_1 3^{m-1}(-1) + \dots + {}_m C_{m-1} 3(-1)^{m-1} + (-1)^m \} + 1 \\ &= 3 \{ 3^{m-1} + {}_m C_1 3^{m-2}(-1) + \dots + {}_m C_{m-1} (-1)^{m-1} \} \end{aligned}$$

これは, 3 で割り切れるので, $r=1$ のときは正しい.

(II) $r=k$ のとき正しい. すなわち, $s=3^{k-1}m$ とするとき, $2^s + 1$ が 3^k で割りきれると仮定する. このとき,

$$2^s + 1 = 3^k q$$

と表せる (q は整数). ここで, $s_1 = 3^k m$ とし, $2^{s_1} + 1$ が 3^{k+1} で割り切れることを示す.

$$\begin{aligned} 2^{s_1} + 1 &= 2^{3s} + 1 \\ &= (2^s + 1)^3 - 3 \cdot 2^s (2^s + 1) \\ &= (3^k q)^3 - 3 \cdot 2^s \cdot 3^k q \\ &= 3^{k+1} (3^{2k-1} q^3 - 2^s q) \end{aligned}$$

であるから, $2^{s_1} + 1$ は 3^{k+1} で割り切れる.

したがって, $r=k+1$ のときも正しい.

以上, (I), (II) より, $s=3^{r-1}m$ のとき, $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることが示された.