

(1) 3人の手の出し方は 3^3 通り.

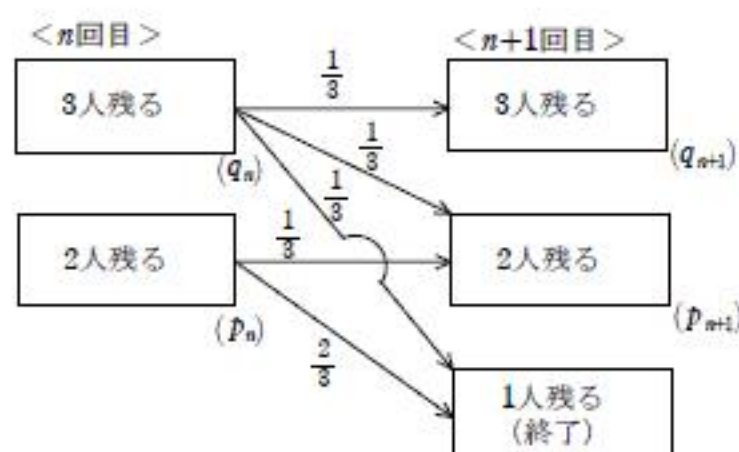
あいこになるのは、3人とも同じ手を出す場合と3人が互いに違う手を出す場合があり
 $3+3!=9$ (通り)

よって, $q_1 = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$... (答)

2人勝ち残るのは、だれが負けるかが3通りあり、何を出して負けるかが3通りあるので
 $3 \times 3 = 9$ (通り)

よって, $p_1 = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$... (答)

(2) n 回目と $n+1$ 回目の状態の推移は次のようになる.



これより,

$$\begin{cases} q_{n+1} = \frac{1}{3} q_n & \dots \textcircled{1} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} q_n & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より、数列 $\{q_n\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列とわかるので、

$$q_n = q_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \dots \text{(答)}$$

このとき、②は

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3} p_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ 3^{n+1} p_{n+1} &= 3^n p_n + 1 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{3^n p_n\}$ は公差1の等差数列. よって、

$$\begin{aligned} 3^n p_n &= 3p_1 + (n-1) = n \\ \therefore p_n &= \frac{n}{3^n} \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) (2)の図より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{n回で1人の勝ち残りが決まる確率}) &= \frac{1}{3} q_{n-1} + \frac{2}{3} p_{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{3^{n-1}} \\ &= \frac{2n-1}{3^n} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも正しい. よって、求める答は

$$\frac{2n-1}{3^n} \quad \dots \text{(答)}$$

2 時刻 t のとき、右図のようになっていると考えてよい。 よって、

$$P(\cos t, \sin t), Q\left(2\cos\frac{t}{2}, 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

このとき、

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (\cos t - 1, \sin t) \\ \overrightarrow{AQ} = \left(2\cos\frac{t}{2} - 1, 2\sin\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\triangle APQ)^2 &= \frac{1}{4} \left\{ 2\sin\frac{t}{2}(\cos t - 1) - \sin t \left(2\cos\frac{t}{2} - 1 \right) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\sin t - 4\sin\frac{t}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sin^2\frac{t}{2} \left(2\cos\frac{t}{2} - 4 \right)^2 = \left(1 - \cos^2\frac{t}{2} \right) \left(\cos\frac{t}{2} - 2 \right)^2 \end{aligned}$$

ここで、 $x = \cos\frac{t}{2}$ とおき ($-1 \leq x \leq 1$),

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - x^2)(x - 2)^2 \\ &= -x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 + 12x^2 - 6x - 4 \\ &= -2(2x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \\ &= -2(x - 2)(2x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

よって、増減表は下のようになる。

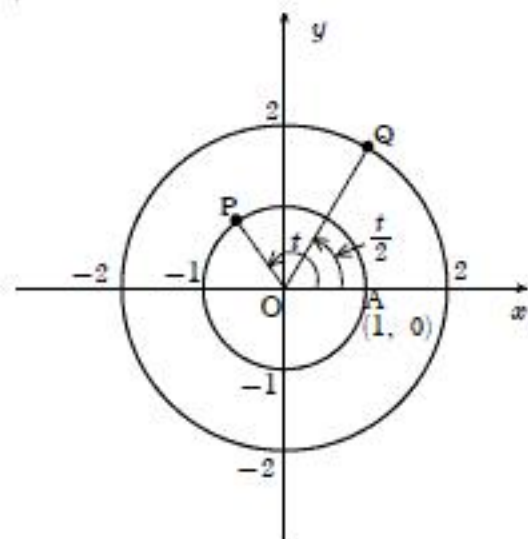
x	-1	...	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	最大	↘	

よって、 $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき最大であり、

$$f(x) = (2x^2 - 2x - 1) \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \right) - 3x + \frac{15}{4}$$

より、最大値は

$$f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = -3 \times \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{15}{4} = \frac{9+6\sqrt{3}}{4} \quad \dots (\text{答})$$



(1) $S_k(1)=1$ であるから,

$$T_m(1)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(1)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k$$

ここで, 2項定理より,

$$(x+1)^m=\sum_{k=0}^m {}_m C_k x^k \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから, $x=1$ を代入することにより,

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k = 2^m - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

したがって,

$$T_m(1)=2^m-2 \quad \dots \text{ (答)}$$

$S_k(2)=1^k+2^k$ であるから,

$$T_m(2)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(2)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (1+2^k)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k + \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k 2^k$$

①において, $x=2$ を代入することにより,

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k 2^k = (2+1)^m - 2^m - 1 = 3^m - 2^m - 1$$

であるから, ②と合わせて,

$$T_m(2)=(2^m-2)+(3^m-2^m-1)=3^m-3 \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) $T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ であることを, n に関する数学的帰納法で示す.

(I) $n=1$ のときは(1)より正しい.

(II) $n=l$ のとき正しい, すなわち

$$T_m(l)=(l+1)^m-(l+1) \quad \dots \textcircled{3}$$

と仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} T_m(l+1) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(l+1) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k \{S_k(l) + (l+1)^k\} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(l) + \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (l+1)^k \\ &= T_m(l) + \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (l+1)^k \end{aligned}$$

ここで, ①に $x=l+1$ を代入することにより,

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (l+1)^k = \{(l+1)+1\}^m - (l+1)^m - 1 = (l+2)^m - (l+1)^m - 1$$

であるから, ③と合わせると,

$$\begin{aligned} T_m(l+1) &= (l+1)^m - (l+1) + \{(l+2)^m - (l+1)^m - 1\} \\ &= (l+2)^m - (l+2) \end{aligned}$$

よって, $n=l+1$ のときも正しい.

(I), (II)より, すべての自然数 n に対して

$$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$$

であることが示された.

$$(3) \quad S_1(p-1)=1+2+\dots+(p-1)=\frac{p-1}{2} \times p$$

p は7以上の素数であるから, 奇数であり, $\frac{p-1}{2}$ は整数. よって, $S_1(p-1)$ は p の倍数.

$$S_2(p-1)=1^2+2^2+\dots+(p-1)^2=\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$$

ここで, $\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$ は整数であり, p は7以上の素数であるから6と互いに素. よって,

$(p-1)(2p-1)$ が6の倍数とわかるので, $\frac{(p-1)(2p-1)}{6}$ は整数. よって, $S_2(p-1)$ は p の倍数.

$$S_3(p-1)=1^3+2^3+\dots+(p-1)^3=\frac{(p-1)^2}{4} \times p^2$$

p は7以上の素数であるから, 同様に $\frac{(p-1)^2}{4}=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ は整数. よって, $S_3(p-1)$ は p の倍数.

また,

$$T_5(p-1)={}_5 C_1 S_1(p-1)+{}_5 C_2 S_2(p-1)+{}_5 C_3 S_3(p-1)+{}_5 C_4 S_4(p-1)$$

より,

$$\begin{aligned} 5S_4(p-1) &= T_5(p-1) - \{{}_5 C_1 S_1(p-1) + {}_5 C_2 S_2(p-1) + {}_5 C_3 S_3(p-1)\} \\ &= p^5 - p - 5S_1(p-1) - 10S_2(p-1) - 10S_3(p-1) \end{aligned}$$

よって, $S_1(p-1), S_2(p-1), S_3(p-1)$ は p の倍数であり, p と5は互いに素であるから,

$S_4(p-1)$ は p の倍数である.