

(1) 3人の手の出し方は 3^3 通り.

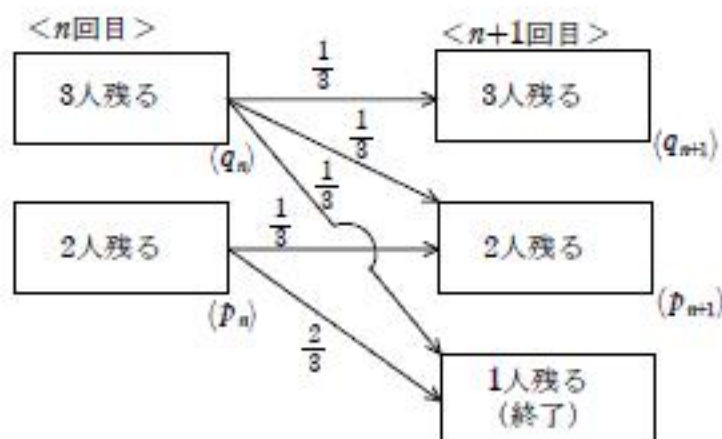
あいこになるのは、3人とも同じ手を出す場合と3人が互いに違う手を出す場合があり
 $3 + 3! = 9$ (通り)

よって, $q_1 = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$... (答)

2人勝ち残るのは、だれが負けるかが3通りあり、何を出して負けるかが3通りあるので
 $3 \times 3 = 9$ (通り)

よって, $p_1 = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$... (答)

(2) n 回目と $n+1$ 回目の状態の推移は次のようになる.



これより,

$$\begin{cases} q_{n+1} = \frac{1}{3} q_n \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} q_n \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

①より、数列 $\{q_n\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列とわかるので、

$$q_n = q_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \dots \text{(答)}$$

このとき、②は

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$3^{n+1} p_{n+1} = 3^n p_n + 1$$

であるから、数列 $\{3^n p_n\}$ は公差1の等差数列. よって、

$$3^n p_n = 3p_1 + (n-1) = n$$

$$\therefore p_n = \frac{n}{3^n} \quad \dots \text{(答)}$$

(3) (2)の図より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} (n \text{回で} 1 \text{人の勝ち残りが決まる確率}) &= \frac{1}{3} q_{n-1} + \frac{2}{3} p_{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{3^{n-1}} \\ &= \frac{2n-1}{3^n} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも正しい. よって、求める答は

$$\frac{2n-1}{3^n} \quad \dots \text{(答)}$$

- (1) $f(x)$ は $x > 0$ において微分可能であるから、平均値の定理より、

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f'(c), \quad x < c < x+1$$

となる c が存在する.

ここで、 $f(x) = 100 \log x$ より、 $f'(x) = \frac{100}{x}$ であり、 $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ であるから、

$$\frac{100}{x+1} < f'(c) = \frac{100}{c} < \frac{100}{x}$$

$$\therefore \frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

- (2) (i) $x \geq 100$ のとき

このとき、

$$0 < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x} \leq \frac{100}{100} = 1$$

であるから、 $[f(100)], [f(101)], \dots, [f(1000)]$ のうちで異なるものは $[f(100)] = 460$ から $[f(1000)] = 690$ までの整数であり、 $690 - 460 (= 231)$ 個ある.

- (ii) $x \leq 99$ のとき

このとき、

$$1 = \frac{100}{100} \leq \frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x)$$

であるから、 $[f(1)], [f(2)], \dots, [f(99)], [f(100)]$ はすべて相異なる.

よって、これらの中に(i)で出たきた整数以外のものが 99 個ある.

- (i), (ii)より、求める答は

$$231 + 99 = 330 \quad (\text{個}) \quad \dots (\text{答})$$

(1) $S_k(1)=1$ であるから,

$$T_m(1)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(1)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k$$

ここで, 2項定理より,

$$(x+1)^m=\sum_{k=0}^m {}_m C_k x^k \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから, $x=1$ を代入することにより,

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k = 2^m - 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

したがって,

$$T_m(1)=2^m-2 \quad \cdots \text{(答)}$$

$S_k(2)=1^k+2^k$ であるから,

$$T_m(2)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(2)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (1+2^k)=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k + \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k 2^k$$

①において, $x=2$ を代入することにより,

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k 2^k = (2+1)^m - 2^m - 1 = 3^m - 2^m - 1$$

であるから, ②と合わせて,

$$T_m(2)=(2^m-2)+(3^m-2^m-1)=3^m-3 \quad \cdots \text{(答)}$$

(2) $T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ であることを, n に関する数学的帰納法で示す.

(I) $n=1$ のときは(1)より正しい.

(II) $n=l$ のとき正しい, すなわち

$$T_m(l)=(l+1)^m-(l+1) \quad \cdots \textcircled{3}$$

と仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} T_m(l+1) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(l+1) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k \{S_k(l) + (l+1)^k\} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(l) + \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (l+1)^k \\ &= T_m(l) + \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (l+1)^k \end{aligned}$$

ここで, ①に $x=l+1$ を代入することにより,

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (l+1)^k = \{(l+1)+1\}^m - (l+1)^m - 1 = (l+2)^m - (l+1)^m - 1$$

であるから, ③と合わせると,

$$\begin{aligned} T_m(l+1) &= (l+1)^m - (l+1) + \{(l+2)^m - (l+1)^m - 1\} \\ &= (l+2)^m - (l+2) \end{aligned}$$

よって, $n=l+1$ のときも正しい.

(I), (II)より, すべての自然数 n に対して

$$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$$

であることが示された.

(3) $p=3$ のときは自明なので, p は5以上の素数としてよい. $S_k(p-1)$ が p の倍数であることを k についての数学的帰納法で示す. ($k=1, 2, 3, \dots, p-2$)

(I) $k=1$ のとき

$$S_1(p-1)=1+2+\dots+(p-1)=\frac{p-1}{2} \times p$$

p は5以上の素数であるから, p は奇数であり, $\frac{p-1}{2}$ は整数. したがって, $S_1(p-1)$ は p の倍数.

(II) $k=1, 2, \dots, l$ のとき($l \leq p-3$),

$$S_k(p-1) \text{が } p \text{の倍数} \quad \cdots \textcircled{4}$$

と仮定する. ここで, 等式

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + \dots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n)$$

において, $m=l+2$, $n=p-1$ とすると,

$$T_{l+2}(p-1) = {}_{l+2} C_1 S_1(p-1) + {}_{l+2} C_2 S_2(p-1) + \dots + {}_{l+2} C_{l+1} S_{l+1}(p-1)$$

(2)の結果を代入すると,

$$\begin{aligned} {}_{l+2} C_{l+1} S_{l+1}(p-1) &= T_{l+2}(p-1) - \{ {}_{l+2} C_1 S_1(p-1) + {}_{l+2} C_2 S_2(p-1) + \dots + {}_{l+2} C_l S_l(p-1) \} \\ &= p^{l+2} - p - \{ {}_{l+2} C_1 S_1(p-1) + {}_{l+2} C_2 S_2(p-1) + \dots + {}_{l+2} C_l S_l(p-1) \} \end{aligned}$$

④より, 右辺は p の倍数とわかるので,

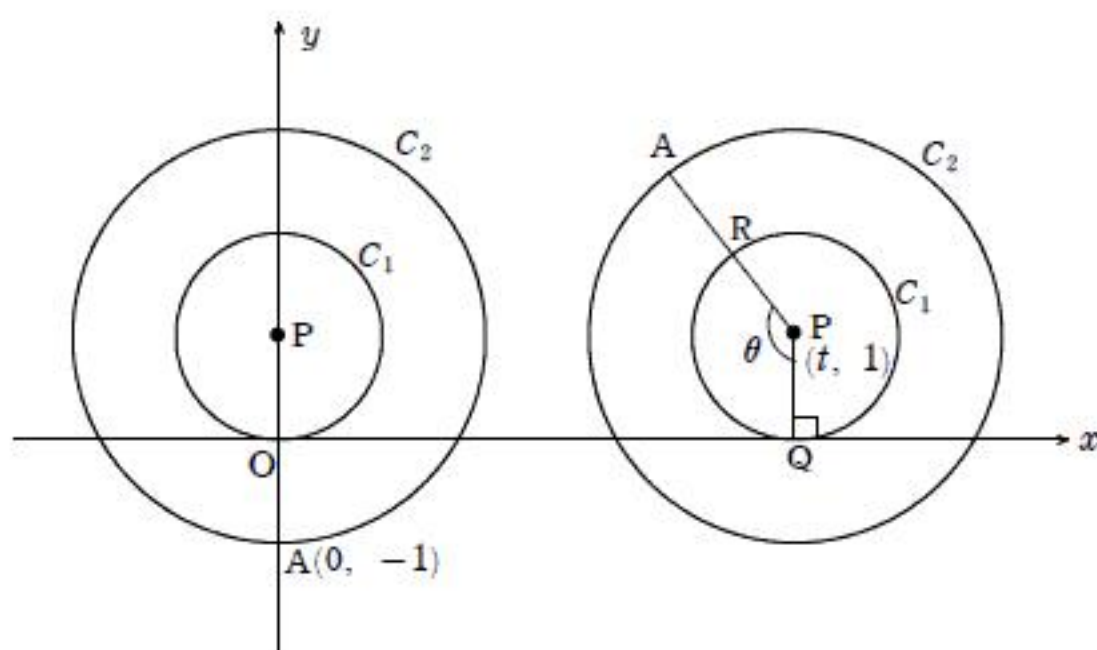
$${}_{l+2} C_{l+1} S_{l+1}(p-1) = (l+2) S_{l+1}(p-1) \text{は } p \text{の倍数} \quad \cdots \textcircled{5}$$

である. ここで, $0 < l+2 < p$ かつ p は素数であるから, ⑤が成立するためには

$S_{l+1}(p-1)$ が p の倍数でなければならない. よって, $k=l+1$ のときも正しい.

(I), (II)より, $k=1, 2, \dots, p-2$ のとき, $S_k(p-1)$ は p の倍数であることが示された.

(1)



上図のように C_1 の中心を P ，時刻 t における C_1 と x 軸の接点を Q ，線分 AP と C_1 の境界線との交点を R とおく。

このとき， $OQ = \widehat{QR}$ であるから， PQ から PA まで時計回りにはかった角を θ とすると，
 $\theta = t$
 これより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cos \left(\frac{3}{2} \pi - \theta \right) \\ 2 \sin \left(\frac{3}{2} \pi - \theta \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t - 2 \sin t \\ 1 - 2 \cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，

$$(x(t), y(t)) = (t - 2 \sin t, 1 - 2 \cos t) \quad \cdots (\text{答})$$

(2) $\frac{d}{dt}x(t) = 1 - 2 \cos t$ ， $\frac{d}{dt}y(t) = 2 \sin t$ より，増減表は下のようになる。

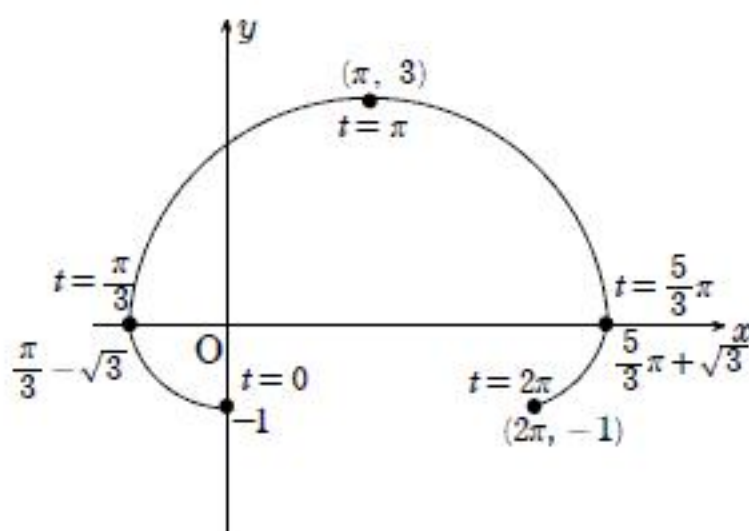
t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$\frac{dx}{dt}$		-	0	+		+	0	-	
$\frac{dy}{dt}$		+		+		-		-	
(x, y)	$(0, -1)$				$(\pi, 3)$				$(2\pi, -1)$

$\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, 0\right)$
 $\left(\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}, 0\right)$

これより， $x(t)$ は $t = \frac{\pi}{3}$ で最小， $t = \frac{5}{3}\pi$ で最大。また， $y(t)$ は $t = 0, 2\pi$ で最小， $t = \pi$ で最大であるから，求める点は

$$(0, -1), \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, 0\right), (\pi, 3), \left(\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}, 0\right), (2\pi, -1) \quad \cdots (\text{答})$$

(3)



上のようなグラフになるから，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}^{\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}} y dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} (1 - 2 \cos t)(1 - 2 \cos t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} (3 - 4 \cos t + 2 \cos 2t) dt \\ &= [3t - 4 \sin t + \sin 2t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} \\ &= 4\pi + 3\sqrt{3} \quad \cdots (\text{答})\end{aligned}$$