

理科系

平成 25 年度 入学試験問題・答案紙・数学公式集

数 学

(情—自然・理・医・工・農)

2 月 26 日(火) 10:00—12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち問題紙 1 枚、答案紙 4 枚、数学公式集 3 枚)である。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは、退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問題紙

1 3人でジャンケンをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し、残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)、勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3人でジャンケンを始め、ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n 、3人が残っている確率を q_n とおく。

- (1) p_1, q_1 を求めよ。
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き、 p_n, q_n の一般項を求めよ。
- (3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

2 $x > 0$ とし、 $f(x) = \log x^{100}$ とおく。

- (1) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

- (2) 実数 a の整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)], [f(2)], [f(3)], \dots, [f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ。

3 k, m, n は整数とし、 $n \geq 1$ とする。 ${}_m C_k$ を二項係数として、 $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める。

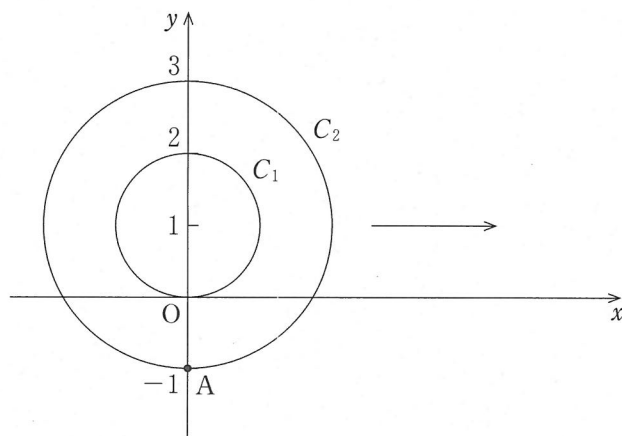
$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \dots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。
- (3) p が3以上の素数のとき、 $S_k(p-1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, p-2$) は p の倍数であることを示せ。

4 半径1の円盤 C_1 が半径2の円盤 C_2 に貼り付けられており、2つの円盤の中心は一致する。 C_2 の周上にある定点を A とする。図のように、時刻 $t = 0$ において C_1 は $O(0, 0)$ で x 軸に接し、 A は座標 $(0, -1)$ の位置にある。2つの円盤は一体となり、 C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t, 1)$ にあるように転がるとき、 $0 \leq t \leq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。

- (1) 時刻 t における A の座標を $(x(t), y(t))$ で表す。 $(x(t), y(t))$ を求めよ。
- (2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ、 $x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標を全て求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。



1

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

1 (解答欄)

2

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

2 (解答欄)

3

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

3 (解答欄)

4

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

4

(解答欄)

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または0)
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5. $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点: $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$
7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:
 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
8. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ベクトルと行列)

10. 2つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ($ad - bc \neq 0$)

(複 素 数)

12. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
13. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
14. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
19. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
20. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
21. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$
22. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
23. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数 列)

24. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$, ($l = a + (n-1)d$)
25. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$34. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 \ (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \ (a \neq 0), \int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \ (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列 ・ 組 合 せ)

$$40. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, \ (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, \ (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$

