

1

(1) 右図において、 $\angle OAP = \angle OQA = 90^\circ$ より、

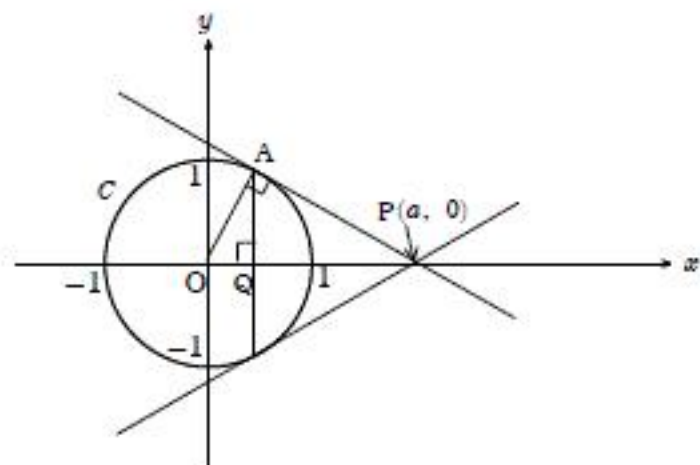
$$\triangle OAQ \sim \triangle OPA$$

よって、

$$OA : OQ = OP : OA$$

$$\therefore OQ = \frac{OA^2}{OP} = \frac{1}{a}$$

これより、Q の x 座標は $\frac{1}{a}$



(2) $R(\cos \theta, \sin \theta)$ とおき、 $\frac{PR}{QR}$ が θ によらない値であることを示す。

$$\frac{PR}{QR} = \frac{\sqrt{(\cos \theta - a)^2 + \sin^2 \theta}}{\sqrt{\left(\cos \theta - \frac{1}{a}\right)^2 + \sin^2 \theta}} = \frac{\sqrt{1 - 2a \cos \theta + a^2}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}(1 - 2a \cos \theta + a^2)}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a \quad (\text{一定})$$

(3)

$$\overrightarrow{RP} = (a - \cos \theta, -\sin \theta)$$

$$\overrightarrow{RQ} = \left(\frac{1}{a} - \cos \theta, -\sin \theta\right)$$

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 0$ であるから、

$$(a - \cos \theta) \left(\frac{1}{a} - \cos \theta\right) + \sin^2 \theta = 0$$

$$2 - \left(\frac{1}{a} + a\right) \cos \theta = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2}{a + \frac{1}{a}} = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

また、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{a^2 + 1}\right)^2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(a^2 - 1)^2}{(a^2 + 1)^2}} \\ &= \pm \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} R\left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \pm \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)$$

また、 $PR = k$ とおくと、(2)より $QR = \frac{k}{a}$

$\triangle PQR$ に注目すると、

$$QR^2 + PR^2 = PQ^2$$

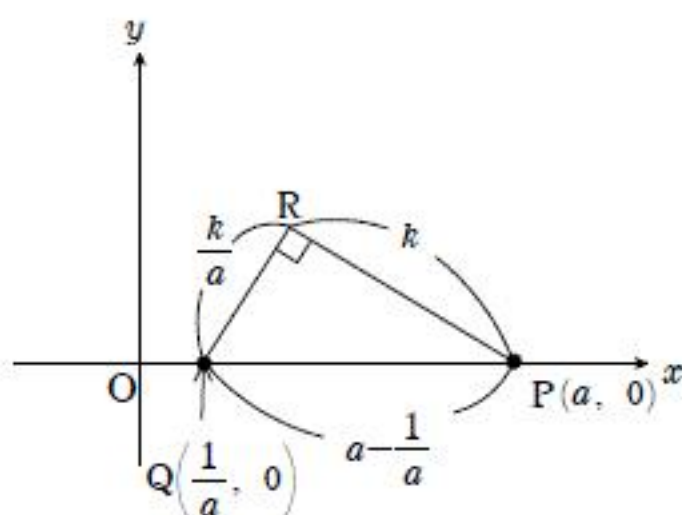
$$\left(\frac{k}{a}\right)^2 + k^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$(a^2 + 1)k^2 = (a^2 - 1)^2$$

$$k^2 = \frac{(a^2 - 1)^2}{a^2 + 1}$$

$$\therefore k = \frac{|a^2 - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (\because a > 1)$$

$$\text{よって、} PR = \frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$



(1) 出た目の差の絶対値が k である確率を $P(k)$ とおく.

右表より

$$P(0) = \frac{6}{36}, P(1) = \frac{10}{36}, P(2) = \frac{8}{36}, P(3) = \frac{6}{36}, P(4) = \frac{4}{36}, P(5) = \frac{2}{36}$$

よって, 期待値を E とすると,

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} \\ &= \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \end{aligned}$$

小 \ 大	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

(出た目の差)

(2) 終了時にでている目の差の絶対値が k である確率を $P_1(k)$ とおく.

このとき, 終了時にでている目の差の絶対値が 1 であるのは次の 2 つの場合である.

- ・ 2 個のサイコロを投げて目の差の絶対値が 1
- ・ 2 個のサイコロを投げて同じ目が出て, そのあと小さいサイコロをもう一度投げて出ている目の差の絶対値が 1 (このような (大, 小₁, 小₂) の目の出方は, 大と小₂ の目の出方を考えると上の表より 10 通りある)

$$\therefore P_1(1) = \frac{10}{36} + \frac{10}{6^3} = \frac{70}{216}$$

同様に

$$P_1(2) = \frac{8}{36} + \frac{8}{6^3} = \frac{56}{216}$$

$$P_1(3) = \frac{6}{36} + \frac{6}{6^3} = \frac{42}{216}$$

$$P_1(4) = \frac{4}{36} + \frac{4}{6^3} = \frac{28}{216}$$

$$P_1(5) = \frac{2}{36} + \frac{2}{6^3} = \frac{14}{216}$$

$$P_1(0) = \frac{6}{6^3} = \frac{6}{216}$$

よって, 期待値を E_1 とすると,

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \cdot \frac{6}{216} + 1 \cdot \frac{70}{216} + 2 \cdot \frac{56}{216} + 3 \cdot \frac{42}{216} + 4 \cdot \frac{28}{216} + 5 \cdot \frac{14}{216} \\ &= \frac{490}{216} = \frac{245}{108} \end{aligned}$$

3

(1) 直線PQの方程式

$$\begin{aligned} y &= \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t} (x-t) + t^2 \\ &= (2t+1)(x-t) + t^2 \\ &= (2t+1)x - t^2 - t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(t) &= (2t+1)a - t^2 - t \\ &= -t^2 + (2a-1)t + a \\ &= -\left(t - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

求める最大値を $M(a)$ とおくと,

$$(i) \quad \frac{2a-1}{2} \leq -1 \quad \left(a \leq -\frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad M(a) = f(-1) = -a$$

$$(ii) \quad -1 \leq \frac{2a-1}{2} \leq 0 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad M(a) = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$(iii) \quad \frac{2a-1}{2} \geq 0 \quad \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad M(a) = f(0) = a$$

(3) 直線PQの通過領域を D とする. t が $-1 \leq t \leq 0$ を動くときの $f(t)$ の最小値を $m(a)$ とおくと,
 D と $x=a$ の交わりは

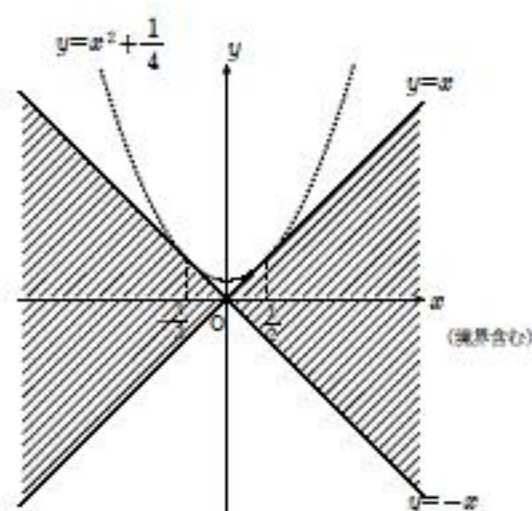
$$(*) \quad x=a \text{ のうち } m(a) \leq y \leq M(a) \text{ の部分}$$

である. ここで, $m(a)$ は

$$(i) \quad \frac{2a-1}{2} \leq -\frac{1}{2} \quad (a \leq 0) \text{ のとき} \quad m(a) = f(0) = a$$

$$(ii) \quad \frac{2a-1}{2} \geq -\frac{1}{2} \quad (a \geq 0) \text{ のとき} \quad m(a) = f(-1) = -a$$

であるから, $(*)$ に注意すると, D は次のようになる.



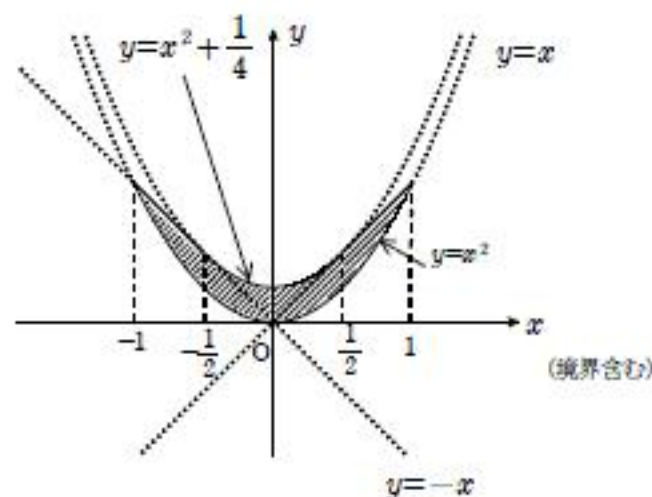
ここで, 点Pの軌跡は

$$y = x^2 \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

点Qの軌跡は

$$y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

であるから, 領域 $y \geq x^2$ が凸領域であることに注意すると, 線分PQの通過領域は次のようになる.



また, y 軸対称性に注意すると, 面積は

$$\begin{aligned} & 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) - x^2 \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2) dx \right] \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{1}{4} x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right\} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$