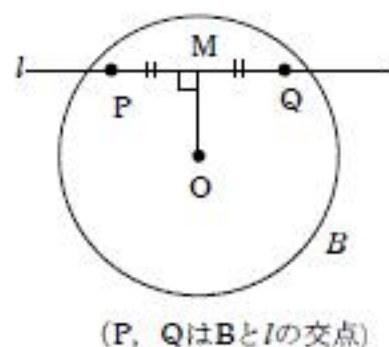


1

(1) 右図において, $MG = \frac{1}{2}PQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore (B \text{ の中心 } O \text{ と } l \text{ の距離}) &= OM \\ &= \sqrt{OP^2 - PM^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$



(2) (1)より

$$\begin{cases} l: x \text{ 軸} \\ B: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

としてよい. $x=t$ による B の切り口の方程式は $(0 \leq t \leq 1)$,

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1 - t^2$$

(i) $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

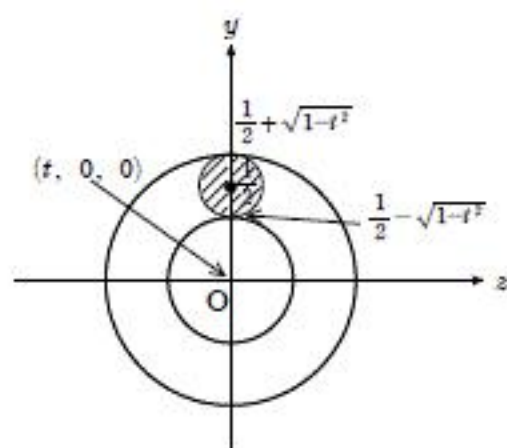
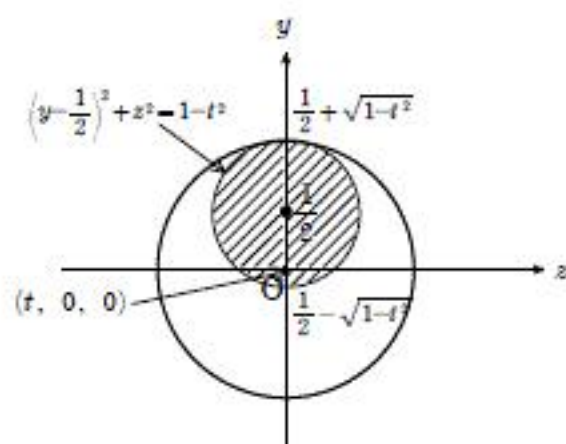
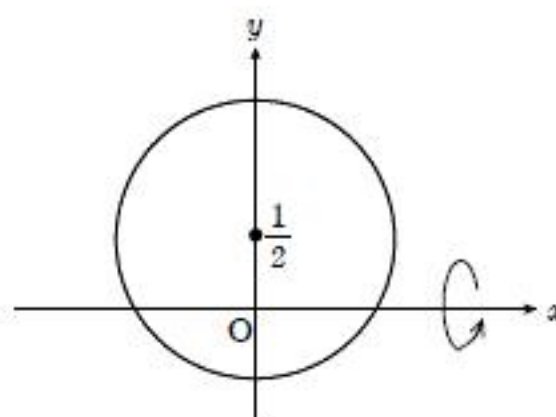
B の切り口を $(t, 0, 0)$ を中心に 1 回転したときの通過領域の面積を $S(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}S(t) &= \pi \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 - t^2}\right)^2 \\ &= \pi \left(\frac{5}{4} - t^2 + \sqrt{1 - t^2}\right)\end{aligned}$$

(ii) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq 1$ のとき

このとき,

$$\begin{aligned}S(t) &= \pi \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 - t^2}\right)^2 - \pi \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1 - t^2}\right)^2 \\ &= 2\pi\sqrt{1 - t^2}\end{aligned}$$



よって, 求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned}V &= 2 \int_0^1 S(t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi \left(\frac{5}{4} - t^2 + \sqrt{1 - t^2}\right) dt + 2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 2\pi\sqrt{1 - t^2} dt \\ &= 2\pi \left[\frac{5}{4}t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2\pi \left(\frac{1}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + 4\pi \left(\frac{1}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi\end{aligned}$$

まずは、直線 PQ の通過領域を D を求める。直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t}(x-t) + t^2 = (2t+1)(x-t) + t^2 = (2t+1)x - t^2 - t$$

直線 PQ と直線 $x=a$ の交点の y 座標を $f(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(t) &= (2t+1)a - t^2 - t \\ &= -t^2 + (2a-1)t + a \\ &= -\left(t - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ここで、 t が $-1 \leq t \leq 0$ を動くときの $f(t)$ の最大値と最小値をそれぞれ $M(a)$, $m(a)$ とおくと、 D と $x=a$ の交わりは

$$(*) \quad x=a \text{ のうち } m(a) \leq y \leq M(a) \text{ の部分}$$

である。ここで、 $m(a)$, $M(a)$ は

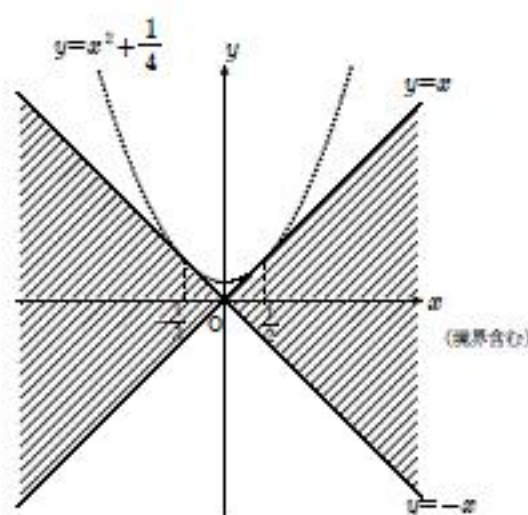
$$(i) \quad \frac{2a-1}{2} \leq -1 \quad \left(a \leq -\frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad \begin{cases} M(a) = f(-1) = -a \\ m(a) = f(0) = a \end{cases}$$

$$(ii) \quad -1 \leq \frac{2a-1}{2} \leq -\frac{1}{2} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq a \leq 0\right) \text{ のとき} \quad \begin{cases} M(a) = a^2 + \frac{1}{4} \\ m(a) = f(0) = a \end{cases}$$

$$(iii) \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{2a-1}{2} \leq 0 \quad \left(0 \leq a \leq \frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad \begin{cases} M(a) = a^2 + \frac{1}{4} \\ m(a) = f(-1) = -a \end{cases}$$

$$(iv) \quad \frac{2a-1}{2} \geq 0 \quad \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad \begin{cases} M(a) = f(0) = a \\ m(a) = f(-1) = -a \end{cases}$$

これより、 $(*)$ に注意すると、 D は次のようになる。



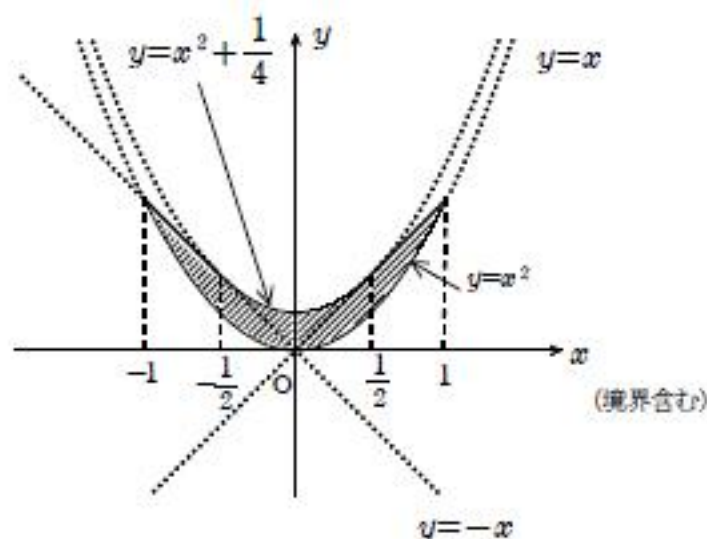
ここで、点 P の軌跡は

$$y = x^2 \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

点 Q の軌跡は

$$y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

であるから、領域 $y \geq x^2$ が凸領域であることに注意すると、線分 PQ の通過領域は次のようになる。



また、 y 軸対称性に注意すると、面積は

$$\begin{aligned} & 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) - x^2 \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2) dx \right] \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{1}{4} x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right\} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

[3]

(1) C_n と x 軸の接点を T_n とおく (右図)

(図 1) の斜線部分の直角三角形に注目すると

$$\begin{aligned} T_n T_{n+1} &= \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} \\ &= 2\sqrt{r_n r_{n+1}} \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{cases} T_n T_{n+2} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}} \\ T_{n+1} T_{n+2} = 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}} \end{cases}$$

$T_n T_{n+2} + T_{n+2} T_{n+1} = T_n T_{n+1}$ であるから

$$2\sqrt{r_n r_{n+2}} + 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} + \frac{1}{\sqrt{r_n}}$$

(2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおくと,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \dots \textcircled{1}$$

$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とすると, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ であるから, ①は

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta \{a_{n+1} - \alpha a_n\} \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha \{a_{n+1} - \beta a_n\} \end{cases}$$

$a_1 = a_2 = 1$ より,

$$\begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} = \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \beta^{n-1} = \beta^n \quad \dots \textcircled{2} \\ a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1} = \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \alpha^{n-1} = \alpha^n \quad \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

② - ③ より

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha) a_n &= \beta^n - \alpha^n \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\beta^n - \alpha^n) \end{aligned}$$

よって,

よって, $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つような α, β, s, t の組の 1 つは

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, s = -\frac{1}{\sqrt{5}}, t = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3) $k \neq 0$ でなければならない.

$$\begin{aligned} \frac{r_n}{k^n} &= \frac{1}{k^n \cdot \frac{1}{r^n}} = \frac{1}{k^n (s\alpha^n + t\beta^n)^2} \\ &= \frac{1}{(\beta^2 k)^n} \cdot \frac{1}{\left\{s\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + t\right\}^2} \end{aligned}$$

ここで $-1 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$ であるから,

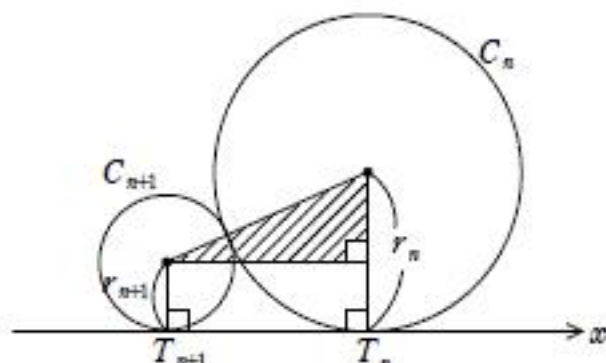
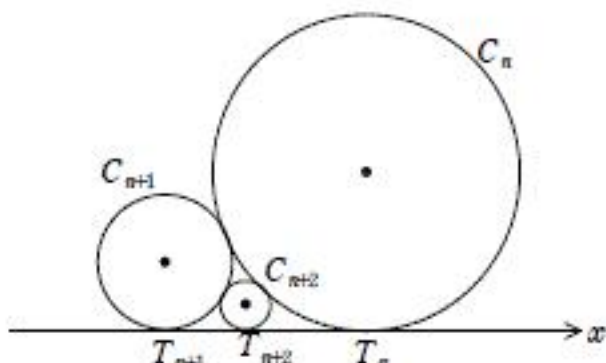
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ s\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + t \right\}^2 = t^2 = \frac{1}{5}$$

また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta^2 k)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} k \right)^n = \begin{cases} \infty & \left(k > \frac{2}{3+\sqrt{5}} \right) \\ 1 & \left(k = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \right) \\ 0 & \left(-\frac{2}{3+\sqrt{5}} < k < \frac{2}{3+\sqrt{5}} \right) \\ \text{振動} & \left(k \leq -\frac{2}{3+\sqrt{5}} \right) \end{cases}$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{k^n}$ が正の値に収束するような k の値は $k = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ であり,

そのときの極限值は 5



(図1)

4

$$(1) \quad a_3 = 1 \iff a_2 = 2, 3$$

であり,

$$\begin{cases} a_2 = 2 \iff a_1 = 4, 5 \\ a_2 = 3 \iff a_1 = 6, 7 \end{cases}$$

よって, $a_3 = 1$ となるのは $N = 4, 5, 6, 7$

(2) $N = 0$ のときは数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 にはなりえない. $N \geq 1$ のとき, N の 2 進法展開を

$$N = b_0 + 2b_1 + 4b_2 + \dots + 2^l b_l$$

とおく ($\forall b_i = 0$ または $1, b_l = 1$). このとき,

$$(*) \begin{cases} a_1 = N \\ a_2 = b_1 + 2b_2 + \dots + 2^{l-1} b_l \\ a_3 = b_2 + 2b_3 + \dots + 2^{l-2} b_l \\ \vdots \\ a_{l-r+1} = b_{l-r} + 2b_{l-r+1} + \dots + 2^r b_l \\ \vdots \\ a_l = b_{l-1} + 2b_l \\ a_{l+1} = b_l \\ a_n = 0 \quad (n \geq l+2) \end{cases}$$

$b_l = 1$ に注意すると, 数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 となるためには

$$b_{l-1} = 0 \quad (\text{かつ } l \geq 1)$$

でなければならない. $l = 1, 2, 3, \dots, 9$ のとき, $b_0, b_1, \dots, b_{l-2}$ は 0 または 1 の値をとるので, そのような N は

$$2^{l-1} \text{ 個}$$

ずつある ($l = 1$ のときも含めてこれは成立する). よって, 求める N は

$$\sum_{l=1}^9 2^{l-1} = 2^9 - 1 = 511 \quad (\text{個})$$

(3) (2) と同様に $N \geq 2$ としてよい. m の 2 進法展開を

$$m = c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \dots + 2^r c_r$$

とおく ($\forall c_i = 0$ または $1, c_r = 1$). $r \leq 99$ としてよい. $b_l = 1$ に注意すると (*) より

数列 $\{a_n\}$ のある項が m となるためには ($a_{l-r+1} = m$ となるしかない),

$$c_0 = b_{l-r}, c_1 = b_{l-r+1}, c_2 = b_{l-r+2}, \dots (\text{かつ } l \geq r)$$

でなければならない. $l = r, r+1, r+2, \dots, 99$ のとき, $b_0, b_1, \dots, b_{l-r-1}$ のとり方を考えると, そのような N は

$$2^{l-r} \text{ 個}$$

ずつある ($l = r$ のときも含めてこれは成立する). よって, 数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率 P は

$$P = \frac{\sum_{l=r}^{99} 2^{l-r}}{2^{100}} = \frac{2^{100-r} - 1}{2^{100}}$$

これより, $r \leq 6$ のとき

$$\frac{2^{100-r} - 1}{2^{100}} \geq \frac{2^{94} - 1}{2^{100}} = \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^{100}} > \frac{1}{100}$$

よって, $m \leq 127$ のとき $P > \frac{1}{100}$ である.

一方, $m = 128 (r = 7)$ のとき

$$\frac{2^{100-r} - 1}{2^{100}} = \frac{2^{93} - 1}{2^{100}} < \frac{2^{93}}{2^{100}} < \frac{1}{2^7} < \frac{1}{100}$$

より, $P \leq \frac{1}{100}$ が成立する. よって, 条件 (*) を満たす最小の m は

$$m = 128$$