

理科系

平成 26 年度 入学試験問題・答案紙・数学公式集

数 学

(情—自然・理・医・工・農)

2 月 26 日(水) 10:00—12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち問題紙 1 枚、答案紙 4 枚、数学公式集 3 枚)である。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用を使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは、退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問 題 紙

1 空間内にある半径 1 の球(内部を含む)を B とする。直線 ℓ と B が交わっており、その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

- (1) B の中心と ℓ との距離を求めよ。
- (2) ℓ のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

2 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。 t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。

3 xy 平面の $y \geq 0$ の部分にあり、 x 軸に接する円の列 $C_1, C_2, C_3, \dots$ を次のように定める。

- C_1 と C_2 は半径 1 の円で、互いに外接する。
- 正の整数 n に対し、 C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し、 C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

- (1) 等式 $\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。
- (2) すべての正の整数 n に対して $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = sa^n + t\beta^n$ が成り立つように、 n によらない定数 a, β, s, t の値を一組与えよ。
- (3) $n \rightarrow \infty$ のとき数列 $\left\{ \frac{r_n}{k^n} \right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め、そのときの極限値を求めよ。

4 負でない整数 N が与えられたとき、 $a_1 = N, a_{n+1} = \left[\frac{a_n}{2} \right]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) として数列 $\{a_n\}$ を定める。ただし $[a]$ は、実数 a の整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を表す。

- (1) $a_3 = 1$ となるような N をすべて求めよ。
- (2) $0 \leq N < 2^{10}$ をみたす整数 N のうちで、 N から定まる数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。
- (3) 0 から $2^{100} - 1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び、数列 $\{a_n\}$ を定める。次の条件(*)をみたす最小の正の整数 m を求めよ。

(*) 数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率が $\frac{1}{100}$ 以下となる。

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または 0)
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5. $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の 2 点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点: $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$
7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
8. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ベクトルと行列)

10. 2 つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ($ad-bc \neq 0$)

(複 素 数)

12. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
13. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
14. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
19. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
20. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
21. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right\}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \right\}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right\}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \right\}$
22. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
23. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数 列)

24. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \left\{ 2a + (n-1)d \right\}$, ($l = a + (n-1)d$)
25. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$34. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4}\pi a^2 \ (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \ (a \neq 0), \int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \ (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列 ・ 組 合 せ)

$$40. {}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}, \ (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}, \ (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$

