$\boxed{1}$

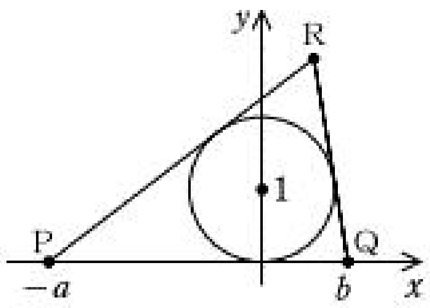
(1)　$b \neq 1$ とする．

直線 QR は y 軸と平行でないから

$y = m(x-b)$

$\therefore mx - y - bm = 0$

とかける．



円と接する条件より

$$\frac{|-1-bm|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \quad \therefore |-1-bm| = \sqrt{m^2+1} \quad \therefore (-1-bm)^2 = m^2+1$$

$$\therefore 1 + 2bm + b^2m^2 = m^2+1 \quad \therefore (b^2-1)m^2 + 2bm = 0$$

$m \neq 0,\ b^2 - 1 \neq 0$ より　　$m = \dfrac{2b}{1-b^2}$

ゆえに　直線 QR は

$$y = \frac{2b}{1-b^2}(x-b) \quad \underline{\therefore 2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0 \ \ldots \ ①}$$

①は $b=1$ でも成り立つ．

(2)　直線 PR は　$-2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0 \ \ldots \ ②$

（①の b を $-a$ で置き換えたもの）

①より　　$x + \dfrac{b^2-1}{2b}y - b = 0 \ \ldots \ ③$

②より　　$-x + \dfrac{a^2-1}{2a}y - a = 0 \ \ldots \ ④$

③+④ より

$$\left(\frac{a^2-1}{2a} + \frac{b^2-1}{2b}\right)y - (a+b) = 0$$

y の係数は　　$\dfrac{b(a^2-1)+a(b^2-1)}{2ab} = \dfrac{(a+b)+(ab-1)}{2ab}$

より $y = \dfrac{2ab}{ab-1}$（$= y_R$ とおく）

④より　　$x = \dfrac{a^2-1}{2a} \cdot \dfrac{2ab}{ab-1} - a$

$$= \frac{b(a^2-1)}{ab-1} - a = \frac{b(a^2-1) - a(ab-1)}{ab-1} = \frac{(a-b)}{ab-1}$$

ゆえに　　$\underline{R\left(\dfrac{a-b}{ab-1}, \dfrac{2ab}{ab-1}\right)}$

(3)　$y_R > 0$ より　　$ab - 1 > 0 \ \therefore ab > 1 \ \ldots \ ⑤$

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot y_R = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{2ab}{ab-1}$$

また，　$\underbrace{\triangle PQR = \frac{1}{2}(PQ+QR+RP) = \frac{1}{2}T}_{\text{内接円半径が1だから}}$　とかけるから

$$\underline{T = 2\triangle PQR = \frac{2ab(a+b)}{ab-1}}$$

(4)　与条件より　$a + b = 4$ かつ⑤

この下で　$T = \dfrac{8ab}{ab-1} = 8\left(1 + \dfrac{1}{ab-1}\right)$

だから「T が最小 $\Longleftrightarrow$ ab が最大」である．

$ab = a(4-a) = -a^2 + 4a = -(a-2)^2 + 4$

$a = 2$　のとき $b = 2$　であり与条件をすべて満たす．

ゆえに　　$\underline{\underline{\min T = \dfrac{32}{3},\ a = 2}}$

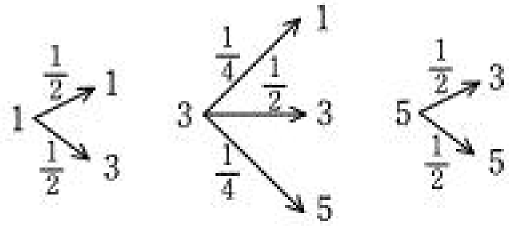
$\boxed{2}$

n 回後の石の位置を x_n とする．$(n \geqq 0,\ x_0 = 1)$

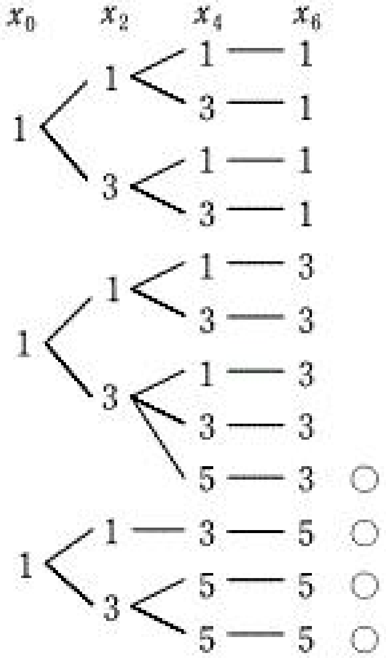
$$\left.\begin{array}{ll} n \text{ が偶数なら} & x_n = 1 \text{ または } 3 \text{ または } 5 \\ n \text{ が奇数なら} & x_n = 2 \text{ または } 4 \end{array}\right\} \text{——}(*)$$

(1) （＊）より　$\underline{p_6(2) = p_6(4) = 0}$

x_{2k} から x_{2k+2} への推移の確率は次のようになる．



$x_6 = 1, 3, 5$ のそれぞれについて x_0 からの推移は次のようになる．



ゆえに

$p_6(1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \underline{\dfrac{5}{16}}$

$p_6(3) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = \underline{\dfrac{1}{2}}$

$p_6(5) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \underline{\dfrac{3}{16}}$

(2)　5つの点すべてに印が付くのは，図で○とかいた4通りの場合だから

$\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \underline{\dfrac{1}{4}}$

(3)　(＊)より n が奇数なら　$p_n(3) = 0$

n が偶数なら，$x_n = 3$ となるのは $x_{n-1} = 2$ または 4 からそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で推移する時だから

$$p_n(3) = \frac{1}{2}p_{n-1}(2) + \frac{1}{2}p_{n-1}(4) \quad (n \geqq 2)$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(p_{n-1}(2) + p_{n-1}(4)\right)}_{(*)\text{より}1} = \frac{1}{2}$$

以上より答は

$$\underline{p_n(3) = \begin{cases} 0 \ (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{2}\left(n \text{ が 偶数}, n \geqq 2\right) \end{cases}}$$

$\boxed{3}$

(1) $a=\sqrt{9+2\sqrt{17}}, b=\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおく．$(a>b>0)$

$$a^2+b^2=\left(9+2\sqrt{17}\right)+\left(9-2\sqrt{17}\right)=18$$

$$ab=\sqrt{\left(9+2\sqrt{17}\right)\left(9-2\sqrt{17}\right)}=\sqrt{81-4\cdot17}=\sqrt{13}$$

ゆえに $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=\underline{18+2\sqrt{13}}$

$a+b>0$ より $a+b=\sqrt{18+2\sqrt{13}}$ ……①

(2) $\alpha=\sqrt{13}+a+b=\sqrt{13}+\sqrt{18+2\sqrt{13}}$

$\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{18+2\sqrt{13}}$

両辺を 2 乗すると $\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$

$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$

さらに両辺を 2 乗すると

$\alpha^4-10\alpha^2+25=52\left(\alpha^2+2\alpha+1\right)$

$\alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$

ゆえに $\underline{f(x)=x^4-62x^2-104x-27}$

(3)(2)の経緯を考え $f(x)=0$ を同値変形すると

$(x^2-5)^2=52(x+1)^2$

$x^2-5=\pm2\sqrt{13}(x+1)$

$x^2\mp2\sqrt{13}x\mp2\sqrt{13}-5=0$ （複合同順）

解の公式

$x=\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}$ または $-\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}$

となる．これが $f_{(x)}=0$ の 4 解である．

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=18-2\sqrt{13}$ と $a-b>0$ より

$a-b=\sqrt{18-2\sqrt{13}}$ ……②

①，②より $f_{(x)}=0$ の 4 解は

$x=\sqrt{13}\pm(a+b), -\sqrt{13}\pm(a-b)$

即ち

$\underline{x=\sqrt{13}+a+b, \sqrt{13}-a-b, -\sqrt{13}+a-b, -\sqrt{13}-a+b}$　である．