$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\dfrac{2^x}{x^2}\ (x\neq 0)$ について

$$f'(x)=\frac{2^x\cdot\log 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2^x\cdot\log 2}{x^4}\left(x^2-\frac{2}{\log 2}x\right)$$

ゆえに $f'(x)>0 \iff x^2-\dfrac{2}{\log 2}x>0$

$$\iff x<0 \text{ または } x>\frac{2}{\log 2}$$

(2) $2^x=x^2$ ―― ①

$x=0$ では成り立たないから

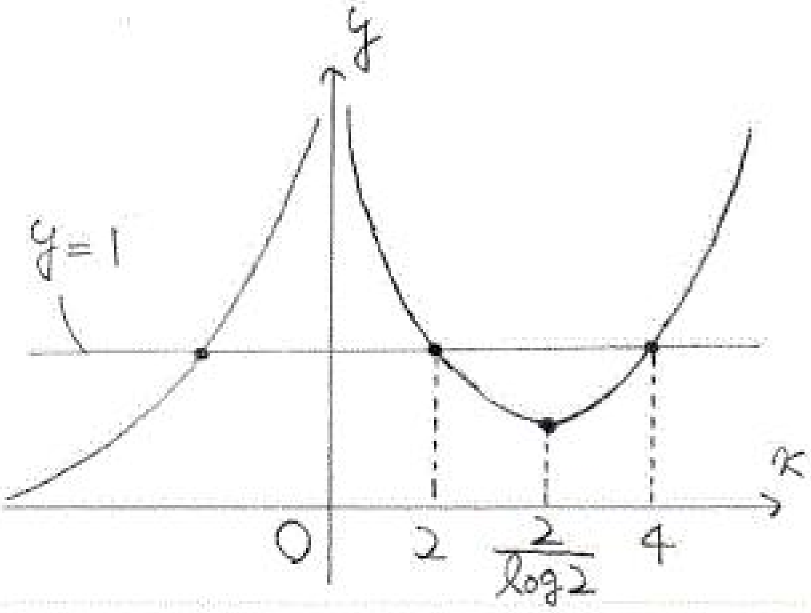
① $\iff \dfrac{2^x}{x^2}=1 \iff f(x)=1$

(1)の経過より $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	／	↘		↗

これと $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\infty$ および $f(2)=f(4)=1$

より $y=f(x)$ のグラフは
図のように直線 $y=1$ と
3交点をもつ。
ゆえに①の実数解は
3個である。



(3) (2)の経過より①の正の解は $x=2, 4$ の2個。

①が負の有理数解をもつと仮定し，それを

$x=-\dfrac{p}{q}$ (p と q は互いに素な正整数)

とおくと

$$2^{-\frac{p}{q}}=\frac{p^2}{q^2} \quad \therefore\ 2^{-p}=\frac{p^{2q}}{q^{2q}} \quad \therefore\ q^{2q}=2^p\cdot p^{2q}$$

ゆえに q^{2q} は p^{2q} の倍数であるが，q^{2q} と p^{2q} は互いに素だから，$p^{2q}=1$ $\therefore p=1$

よって $q^{2q}=2$ となるが，これを満たす q はない。

($q=1$ なら $q^{2q}=1$，$q\geqq 2$ なら $q^{2q}\geqq 4$ だから)

したがって①は負の有理数解をもたない。

答は $x=2, 4$

$\boxed{2}$ (1) $a=\sqrt{9+2\sqrt{17}}$, $b=\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおく。

$a>b>0$ —— ①

$a^2+b^2=18$

$ab=\sqrt{(9+2\sqrt{17})(9-2\sqrt{17})}=\sqrt{81-68}=\sqrt{13}$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=18+2\sqrt{13}$

$a+b>0$ より $a+b=\sqrt{18+2\sqrt{13}}$ —— ②

$\alpha=\sqrt{13}+a+b=\sqrt{13}+\sqrt{18+2\sqrt{13}}$

$\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{18+2\sqrt{13}}$

両辺を2乗すると $\alpha^2+13-2\sqrt{13}\alpha=18+2\sqrt{13}$

$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$

さらに両辺を2乗すると

$\alpha^4-10\alpha^2+25=52(\alpha^2+2\alpha+1)$

$\alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$

ゆえに $\underline{f(x)=x^4-62x^2-104x-27}$ //

(2) (1)の経過を考え、$f(x)=0$ を同値変形すると

$(x^2-5)^2=52(x+1)^2$

$x^2-5=\pm2\sqrt{13}(x+1)$

$x^2\mp2\sqrt{13}x\mp2\sqrt{13}-5=0$ (複号同順) 解の公式

$x=\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}$ または $-\sqrt{13}\pm\sqrt{18-2\sqrt{13}}$

となる。これが $f(x)=0$ の4解である。

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=18-2\sqrt{13}$ と $a-b>0$ より

$a-b=\sqrt{18-2\sqrt{13}}$ —— ③

②,③ より $f(x)=0$ の4解は

$x=\sqrt{13}\pm(a+b)$, $-\sqrt{13}\pm(a-b)$

即ち

$x=\underbrace{\sqrt{13}+a+b}_{\alpha}, \underbrace{\sqrt{13}-a-b}_{\beta\text{とおく}}, \underbrace{-\sqrt{13}+a-b}_{\gamma\text{とおく}}, \underbrace{-\sqrt{13}-a+b}_{\delta\text{とおく}}$ である。

(3) ① より α は残りの3つより大きい。

$\beta-\gamma=2\sqrt{13}-2a=2(\sqrt{13}-a)<0$ $(\because a>\sqrt{13})$

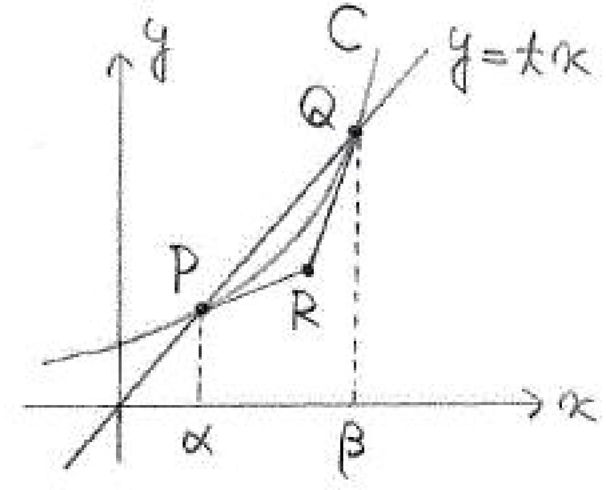
$\beta-\delta=2\sqrt{13}-2b=2(\sqrt{13}-b)>0$ $(\because b<\sqrt{13})$

ゆえに $\beta<\gamma$, $\beta>\delta$

答は $\underline{\alpha>\gamma>\beta>\delta}$ //

③ (1) $e^{\alpha}=t\alpha,\ e^{\beta}=t\beta$ である。

$P(\alpha, t\alpha)$, $Q(\beta, t\beta)$



Pにおける Cの接線は

$y=e^{\alpha}(x-\alpha)+t\alpha$

$\quad = t\alpha(x-\alpha)+t\alpha$ —— ①

Qにおける Cの接線は

$y=t\beta(x-\beta)+t\beta$ —— ②

②−① より $0=t(\beta-\alpha)x-t(\beta^2-\alpha^2)+t(\beta-\alpha)$

両辺を $t(\beta-\alpha)\,(>0)$ で割ると

$0=x-(\beta+\alpha)+1 \quad \therefore x=\alpha+\beta-1$

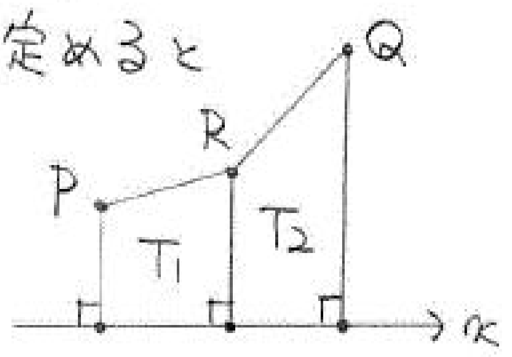
このとき ① より $y=t\alpha(\beta-1)+t\alpha=t\alpha\beta$

ゆえに $R(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$

Cは下に凸だから 右上図のようになる。

$S_1=\int_{\alpha}^{\beta}e^x\,dx=\left[e^x\right]_{\alpha}^{\beta}=e^{\beta}-e^{\alpha}=t\beta-t\alpha$

右下図のように台形の面積 T_1, T_2 を定めると



$T_1=\frac{1}{2}(t\alpha+t\alpha\beta)(\beta-1)$

$\quad =\frac{1}{2}t\alpha(\beta^2-1)$

$T_2=\frac{1}{2}(t\alpha\beta+t\beta)(1-\alpha)$

$\quad =\frac{1}{2}t\beta(1-\alpha^2)$

$T_1+T_2=\frac{1}{2}t(\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha+\beta)$

$\quad =\frac{t}{2}(\beta-\alpha)(\alpha\beta+1)$

$S_2=S_1-(T_1+T_2)=t(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}(\beta-\alpha)(\alpha\beta+1)$

$\quad =\frac{t}{2}(\beta-\alpha)\{2-(\alpha\beta+1)\}=\frac{t}{2}(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)$

よって $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{t}{2}(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)}{t(\beta-\alpha)}=\frac{1-\alpha\beta}{2}$ —— ③ //

(2) 図より (Rのx座標)<(Qのx座標) だから

$\alpha+\beta-1<\beta \quad \therefore \alpha<1$ —— ④

ゆえに $e^{\alpha}<e$ これと $e^{\alpha}=t\alpha$ より $t\alpha<e \quad \therefore \alpha<\frac{e}{t}$

また $\beta>0$ より 問題文中の不等式を用いて $e^{\beta}>\beta^2$

これと $e^{\beta}=t\beta$ より

$t\beta>\beta^2 \quad \therefore t>\beta \quad \therefore t^2>t\beta \quad \therefore t^2>e^{\beta} \quad \therefore 2\log t>\beta$

よって α,β が正であることも考えて

$0<\alpha\beta<\frac{2e\log t}{t}$ が成り立つ。

$\lim_{t\to\infty}$(右辺)$=0$ だから，はさみうちの原理より，$\lim_{t\to\infty}\alpha\beta=0$

これと ③ より $\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}$ //

(注) $f(x)=\frac{e^x}{x}\ (x\neq 0)$ とおくと

$e^x=tx \iff f(x)=t$ —— ⑤

$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

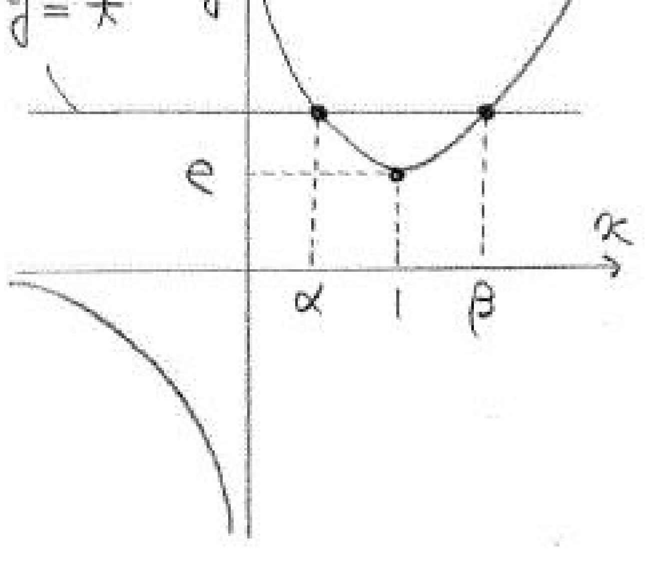
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	/	−	0	+
$f(x)$	↘	/	↘	e	↗

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\pm 0}f(x)=\pm\infty$ (複号同順)

以上から $y=f(x)$ のグラフは

右図のようになる。



ゆえに $t>e$ の下で ⑤ は

実数解を2個もつ。

これが $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ だから

図より $0<\alpha<1<\beta$ である。

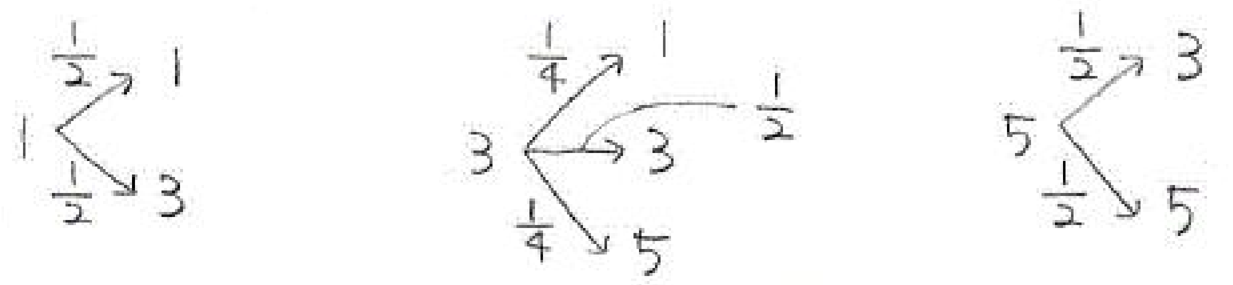
(④はこのように導くこともできる。)

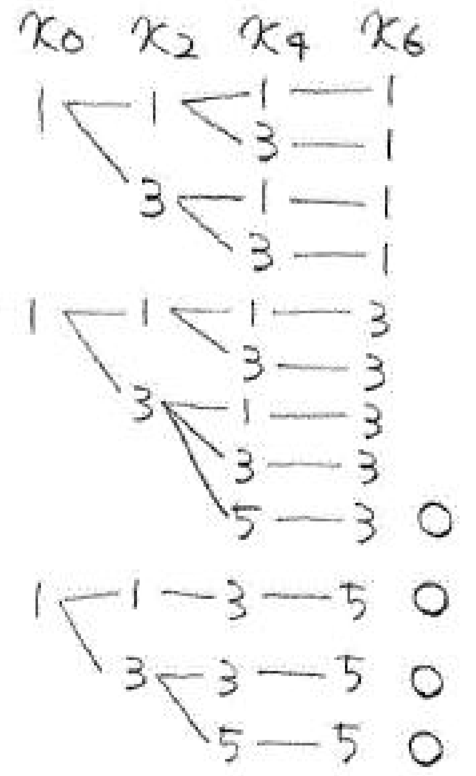
4 n回後の石の位置を x_n とする。$(n \geqq 0,\ x_0 = 1)$

nが偶数なら $x_n = 1$ または 3 または 5
nが奇数なら $x_n = 2$ または 4 —— (*)

(1) (*)より $\underline{P(x_6 = 2) = P(x_6 = 4) = 0}$

x_{2k} から x_{2k+2} への推移の確率は次のようになる。





左の樹形図より

$P(x_6 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \underline{\frac{5}{16}}$

$P(x_6 = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \underline{\frac{1}{2}}$

$P(x_6 = 5) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \underline{\frac{3}{16}}$

(2) 5つの点すべてに印がつくのは (1)の樹形図で○とかいた4通りの場合だから

$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \underline{\frac{1}{4}}$

(3) n回後に印のついている点の個数を y_n とする。

(I) nが偶数のとき，$n = 2k\ (k \geqq 1)$ とおく。

$y_n \leqq 3$ となるのは，$1 \to 2$ (確率1) のあと，

$2 \rightarrow \{1, 3\} \rightarrow 2$ (確率$\frac{3}{4}$) を $k-1$回繰り返し，

最後に $2 \rightarrow \{1, 3\}$ (確率1) となるときだから

$P(y_n \leqq 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ —— ①

また $y_n = 2$ となるのは $1 \to 2 \to 1$ (確率$\frac{1}{2}$) を k回繰り返すときだから

$P(y_n = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ —— ②

ゆえに

$P(y_n = 3) = ① - ② = \underline{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$

(II) nが奇数のとき，$n = 2k+1\ (k \geqq 0)$ とおく。

$y_n \leqq 3$ となるのは，$1 \to 2$ のあと，$2 \rightarrow \{1, 3\} \rightarrow 2$ を k回繰り返すときだから

$P(y_n \leqq 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ —— ③

また $y_n = 2$ となるのは，$1 \to 2 \to 1$ を k回繰り返したあと $1 \to 2$ となるときだから

$P(y_n = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ —— ④

ゆえに

$P(y_n = 3) = ③ - ④ = \underline{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$