

$-1 < t < b$ ①の下で

$$\text{TAの傾きは} \frac{t^2 - 1}{t - (-1)} = t - 1$$

$$\text{TBの傾きは} \frac{t^2 - b^2}{t - b} = t + b$$

だから、 $\angle \text{ATB}$ が直角となる条件は

$$(t-1)(t+b) = -1$$

$$\therefore t^2 + (b-1)t - b + 1 = 0 \quad \text{.....②}$$

①かつ②を満たす t が存在するような b (> -1)の範囲が求めるものである.

$f(t) = (\text{②の左辺})$ とおく.

$f(t)$ のグラフは下に凸の放物線で、軸は $t = -\frac{b-1}{2}$

$$D = (b-1)^2 - 4(-b+1) = (b+3)(b-1) \text{とおく.}$$

$$\text{(I)} \quad -\frac{b-1}{2} \leq -1 \iff b \geq 3 \text{のとき}$$

条件は、 $f(-1) < 0$ かつ $f(b) > 0$

$$f(-1) < 0 \text{ より, } -2b + 3 < 0 \therefore b > \frac{3}{2}$$

$$f(b) > 0 \text{ より, } 2b^2 - 2b + 1 > 0 \quad (\text{常に成立})$$

まとめて、 $b \geq 3$ ①

$$\text{(II)} \quad -\frac{b-1}{2} \geq b \iff b \leq \frac{1}{3} \text{のとき}$$

条件は、 $f(-1) > 0$ かつ $f(b) < 0$

であるが、 $f(b) < 0$ は成り立たないから、不適.

$$\text{(III)} \quad -1 < -\frac{b-1}{2} < b \iff \frac{1}{3} < b < 3 \text{のとき}$$

条件は、 $D \geq 0$ かつ ($f(-1) > 0$ または $f(b) > 0$)

であるが、 $f(b) > 0$ は常に成り立つから、 $D \geq 0$ と同値.

$$D = (b+3)(b-1) \geq 0 \text{ より, } b \leq -3 \text{ または, } b \geq 1$$

まとめて、 $1 \leq b < 3$ ②

以上より、答は (① または ②) であり、 $b \geq 1$

2

全事象は ${}_{n+2}C_k$ 通り. $(1 \leq k \leq n+2)$

(1) 積が 1 以上 $\iff$ 数字 0 のカードが取り出されない.①

$1 \leq k \leq n+1$ のとき, ①を満たすものは ${}_{n+1}C_k$ 通りだから, その確率は,

$$\frac{{}_{n+1}C_k}{{}_{n+2}C_k} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+2-k}} = \frac{n+2-k}{n+2}$$

この結果は $k=n+2$ のとき(この確率は 0)でも成り立つ.

(2) 積が 2 $\iff$ 0 のカードが取り出されず, かつ 2 のカードが取り出される.②

$1 \leq k \leq n+1$ のとき, ②を満たすものは ${}_nC_{k-1}$ 通りだから,

$$\begin{aligned} Q_n(k) &= \frac{{}_nC_{k-1}}{{}_{n+2}C_k} \\ &= \frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}{\frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!}} = \frac{1}{\frac{(n+1)(n+2)}{k(n+2-k)}} = \frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

この結果は $k=n+2$ のときも成り立つ.

(3) $Q_n(k) = a_k$ とおく.

$a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ の中で最大のものを探す.

$1 \leq k \leq n+1$ とする. $\leftarrow a_{k+1}$ を考えるため

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)(n+1-k)}{(n+1)(n+2)}$$

$a_k > 0$ に注意して, $\leftarrow a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ は正.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)(n+1-k)}{k(n+2-k)} \quad \dots\dots ③$$

$$a_k < a_{k+1} \iff \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \iff ③ > 1$$

$$\iff (k+1)(n+1-k) > k(n+2-k) \iff k < \frac{n+1}{2}$$

同様にして,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k < a_{k+1} \iff k < \frac{n+1}{2} \\ a_k = a_{k+1} \iff k = \frac{n+1}{2} \\ a_k > a_{k+1} \iff k > \frac{n+1}{2} \end{array} \right\} \quad (*)$$

n の偶奇で場合分けをする.

(I) n が偶数のとき. $n=2m$ とおく.

(*) より,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k < a_{k+1} \iff k < m + \frac{1}{2} \iff k \leq m \\ a_k > a_{k+1} \iff k > m + \frac{1}{2} \iff k \geq m+1 \end{array} \right.$$

ゆえに, $a_1 < a_2 < \dots < a_m < a_{m+1} > a_{m+2} > \dots > a_{n+2}$ より, a_{m+1} が最大.

$$k = m+1 = \underline{\underline{\frac{n}{2} + 1}} \text{ のときに } Q_n(k) \text{ は最大で, 最大値は}$$

$$\frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{(n+1)(n+2)} = \underline{\underline{\frac{n+2}{4(n+1)}}}$$

(II) n が奇数のとき. $n=2m-1$ とおく.

(*) より,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k < a_{k+1} \iff k < m \iff k \leq m-1 \\ a_k = a_{k+1} \iff k = m \\ a_k > a_{k+1} \iff k > m \iff k \geq m+1 \end{array} \right.$$

ゆえに, $a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < a_m = a_{m+1} > a_{m+2} > \dots > a_{n+2}$ より, a_m, a_{m+1} が最大.

$$k = m, m+1 = \underline{\underline{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}}} \text{ のときに } Q_n(k) \text{ は最大で, 最大値は}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)}{(n+1)(n+2)} = \underline{\underline{\frac{n+3}{4(n+2)}}}$$

3

(1) $2^k p$ がこの数の素因数分解であることに注意して

$$s(2^k p) = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k)(1 + p) = \underline{\underline{(2^{k+1} - 1)(1 + p)}}$$

(2) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ (素因数分解) より,

$$\begin{aligned} s(2016) &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^5)(1 + 3 + 3^2)(1 + 7) \\ &= 63 \cdot 13 \cdot 8 = \underline{\underline{6552}} \end{aligned}$$

(3) 2016 の正の約数 n は, $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$

($0 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 1$, それぞれ整数)

と表せるから,

$$s(n) = \underbrace{(1 + \dots + 2^a)}_{A \text{とおく}} \underbrace{(1 + \dots + 3^b)}_{B \text{とおく}} \underbrace{(1 + \dots + 7^c)}_{C \text{とおく}}$$

A は奇数だから,

$$s(n) = 2016 \quad \text{つまり} \quad ABC = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

ならば BC は $2^5 = 32$ の倍数である.

BC の候補は $3 \cdot 2 = 6$ 通りあって, すべて調べると,

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 1 = 1 \\ (1 + 3) \cdot 1 = 4 \\ (1 + 3 + 3^2) \cdot 1 = 13 \\ 1 \cdot (1 + 7) = 8 \\ (1 + 3) \cdot (1 + 7) = 32 \\ (1 + 3 + 3^2) \cdot (1 + 7) = 104 \end{array} \right.$$

この中で 32 の倍数であるものより, $BC = 32$

すると $A = 63$ より,

$$a = 5 \quad \therefore n = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{\underline{672}}$$