

1

$-2 < t < b$ の下で

AT の傾きは $t-2$

BT の傾きは $t+b$

ゆえに、 $\angle ATB$ が直角となる条件は $(t-2)(t+b)=-1$

$$\begin{cases} t^2 + (b-2)t - 2b + 1 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -2 < t < b & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①かつ②を満たす t が存在するような $b (> -2)$ の範囲が求めるものである。

$f(t) = (\textcircled{1} \text{の左辺})$ とおくと、

$f(t)$ のグラフは下に凸の放物線で、軸は $t = -\frac{b-2}{2}$

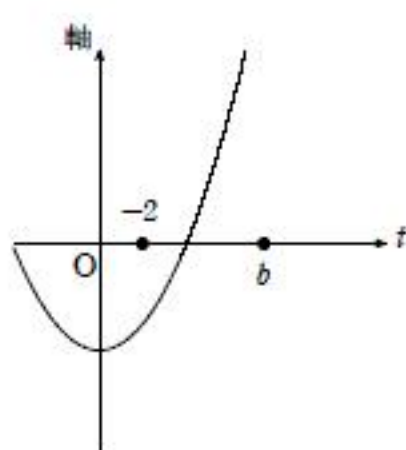
また、 $D = (b-2)^2 - 4(-2b+1) = b^2 + 4b$ とおく。

(I) $-\frac{b-2}{2} \leq -2 \iff b \geq 6$ のとき

条件は、

$$\begin{cases} f(-2) < 0 \\ f(b) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b > \frac{9}{4} \\ b < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ または } b > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (*) \text{ (あとで使う)}$$

まとめて、 $b \geq 6$ $\cdots \cdots \textcircled{A}$

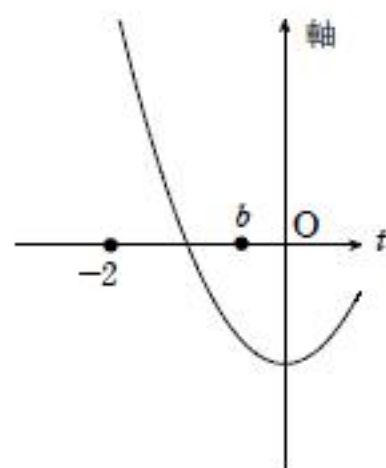


(II) $-\frac{b-2}{2} \geq b \iff -2 < b \leq \frac{2}{3}$ のとき

条件は、

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(b) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b < \frac{9}{4} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} < b < \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

まとめて、 $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < b \leq \frac{2}{3}$ $\cdots \cdots \textcircled{B}$



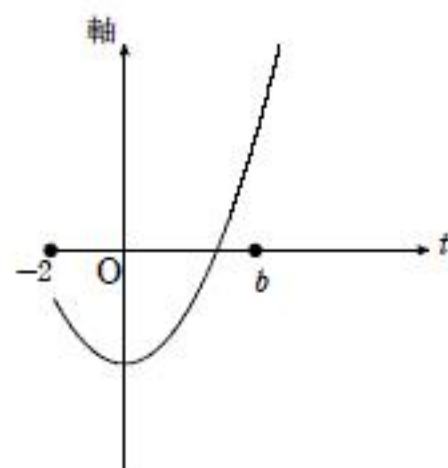
(III) $-2 < -\frac{b-2}{2} < b \iff \frac{2}{3} < b < 6$ のとき

条件は、

$D \geq 0$ かつ $(f(-2) > 0 \text{ または } f(b) > 0)$

$$\iff \begin{cases} b \leq -4 \text{ または } b \geq 0 \\ b < \frac{9}{4} \text{ または } (*) \end{cases}$$

まとめて、 $\frac{2}{3} < b < 6$ $\cdots \cdots \textcircled{C}$



以上より、答は $(\textcircled{A} \text{ または } \textcircled{B} \text{ または } \textcircled{C})$ より、

$$\underline{\underline{b > \frac{2-\sqrt{2}}{2}}}$$

(別解)

$(t-2)(t+b)=-1$ は $t=2$ では成り立たないから、

$$t+b = \frac{-1}{t-2} \quad \therefore b = -t - \frac{1}{t-2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \text{ と同値.}$$

$g(t) = (\textcircled{3} \text{の右辺})$ とおいて、

$$\begin{cases} b = g(t) \\ -2 < t < b \end{cases} \iff \begin{cases} t < b = g(t) \\ t > -2 \end{cases}$$

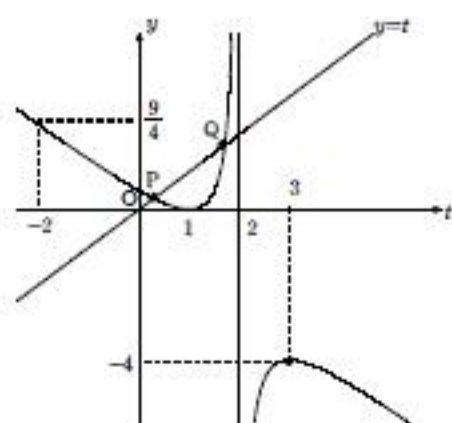
を満たす t が存在するような $b (> -2)$ の範囲が求めるものである。

$$g'(t) = -1 + \frac{1}{(t-2)^2} = \frac{-(t-1)(t-3)}{(t-2)^2}$$

$g(t)$ の増減表

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	-	0	+	$\times$	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

$t \rightarrow \pm\infty, t \rightarrow 2 \pm 0$ の極限も考えて、 $y = g(t)$ のグラフおよび直線 $y = t$ の図を描く。



$g(t) = t$ を解くと、

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

ゆえに、図の P, Q は

$$P\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right), Q\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$y = b$ と $y = g(t)$ の共有点が、 $y > t$ かつ $t > -2$ の範囲に存在するような b の範囲を考えて、答えは

$$\underline{\underline{b > \frac{2-\sqrt{2}}{2}}}$$

(注)

$$\begin{aligned} \begin{cases} b = g(t) \\ -2 < t < b \end{cases} &\iff \begin{cases} b = g(t) \\ -2 < t < g(t) \end{cases} \leftarrow \text{これを計算する} \\ &\iff \begin{cases} b = g(t) \\ -2 < t < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ または } \frac{2+\sqrt{2}}{2} < t < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

と変形して考えることもできる。

2

(1) P は第 1 象限にあるから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

$OP = r$ とおくと、 $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と表せて、P は円 C 上にあるから、

$$\begin{aligned}(r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2 &= 1 \\ r^2 - 2r \cos \theta &= 0\end{aligned}$$

$r > 0$ より、 $r = 2 \cos \theta$ (=OP)

ゆえに、

$P(2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta)$

(2) 円 D 上の点 Q $(-2 + 7 \cos \varphi, 7 \sin \varphi)$ とおく。

θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の定数、 φ は任意の変数とみる。

公式より、

$$\begin{aligned}\Delta OPQ \\ &= \frac{1}{2} | 2 \cos^2 \theta \cdot 7 \sin \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta (-2 + 7 \cos \varphi) | \\ &= \cos \theta \cdot | 7 (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi) + 2 \sin \theta | \\ &\hspace{15em} (\because \cos \theta > 0) \\ &= \cos \theta \cdot | 7 \sin (\varphi - \theta) + 2 \sin \theta |\end{aligned}$$

$\varphi - \theta$ は任意だから、 $7 \sin (\varphi - \theta)$ は、 $-7 \leq 7 \sin (\varphi - \theta) \leq 7$ の範囲を動き、 $2 \sin \theta > 0$ も考えると、

$\sin (\varphi - \theta) = 1$ のときに ΔOPQ は最大で、

$$\cos \theta (7 + 2 \sin \theta) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

このとき、 $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) より、

$Q(-2 - 7 \sin \theta, 7 \cos \theta)$

(3) $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のときも(2)の結果は成り立つ。

図形 (円 C と D) は x 軸に関して対称だから、P が $y \geq 0$ の範囲にあるとして一般性を失わない。

そこで、まず P を固定して (つまり、 θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で固定して) Q を動かしたときの ΔOPQ の最大値が①である。ゆえに、 θ を動かしたときの①の最大値が求めるものである。

$f(\theta) = \textcircled{1} = 7 \cos \theta + \sin 2\theta$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(\theta) &= -7 \sin \theta + 2 \cos 2\theta \\ &= -4 \sin^2 \theta - 7 \sin \theta + 2 \\ &= -(4 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2)\end{aligned}$$

より、 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ かつ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす α をとると、

$f(\theta)$ の増減は

θ	0	$\dots$	α	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$	7	$\nearrow$		$\searrow$	0

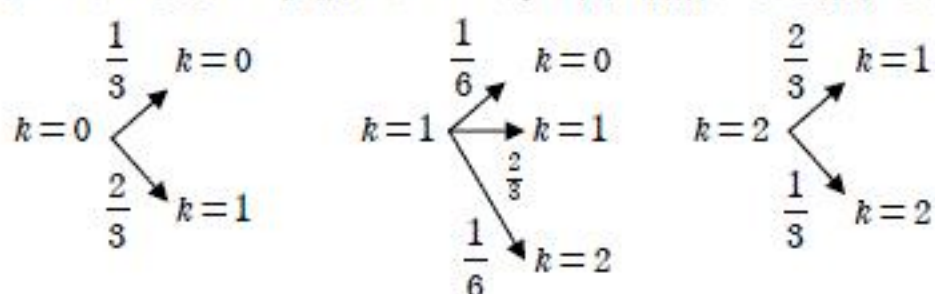
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ より,} \\ f(\alpha) &= \cos \alpha (7 + 2 \sin \alpha) \\ &= \frac{15\sqrt{15}}{8}\end{aligned}$$

よって、

$\max f(\theta) = \frac{15\sqrt{15}}{8}$

であり、これが求める最大値である。

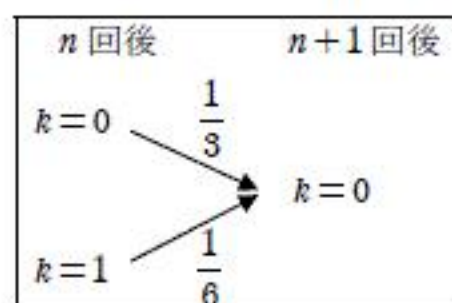
Bに入っている赤玉の個数 k について、1回の操作による推移とその確率は次のようになる。



$P_n(0)=a_n, P_n(1)=b_n, P_n(2)=c_n$ とおく。

$a_0=1, b_0=c_0=0$ と定める。

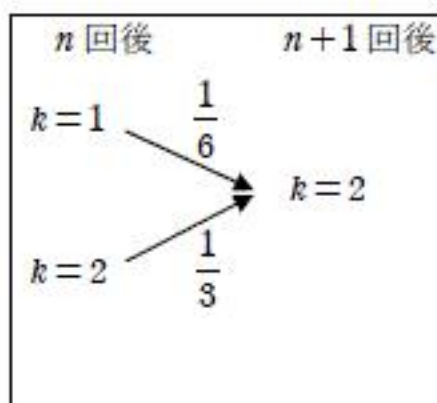
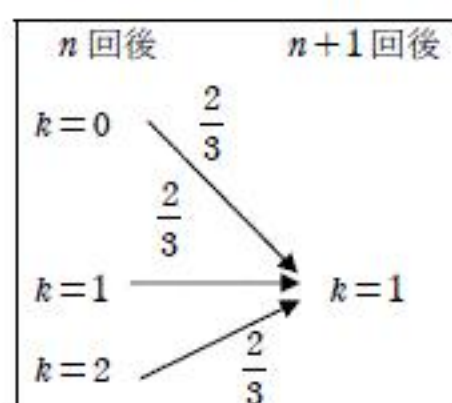
$n+1$ 回の操作後に $k=0$ となるのは、 n 回の操作後から次のように推移するときである。



ゆえに、

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

同様に、 $n+1$ 回の操作の後に $k=1, 2$ となるものは次の通り。



ゆえに、

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{3}c_n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④は $n \geq 1$ で成り立つ。

(1)

$$\textcircled{1} \text{より, } a_1 = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{6}b_0 = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } b_1 = \frac{2}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{3} \text{より, } c_1 = \frac{1}{6}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = 0$$

ゆえに、

$$\underline{\underline{P_1(0) = \frac{1}{3}, P_1(1) = \frac{2}{3}, P_1(2) = 0}}$$

(2)

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{より, } b_{n+1} = \frac{2}{3} \quad (n \geq 0)$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{3} \quad (n \geq 1)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \text{より, } a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n)$$

$$\text{これと, } \textcircled{4} \text{より, } a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{3} \quad (n \geq 0)$$

$$\therefore a_n + c_n = \frac{1}{3} \quad (n \geq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{より, } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - c_n)$$

ゆえに、 $\{a_n - c_n\}$ は $n \geq 0$ において、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列だから

$$a_n - c_n = (a_0 - c_0) \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より、 $n \geq 1$ において、

$$a_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

以上より、 $n \geq 1$ において、

$$\underline{\underline{P_n(0) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}, P_n(1) = \frac{2}{3}, P_n(2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}}}$$

(注) ①と $b_n = \frac{2}{3}$ より、 a_n の漸化式を作って解くこともできる。

4

(1) 解と係数の関係より,

$$(*) \iff \begin{cases} c+d=-a \\ cd=b \\ e+f=-c \\ ef=d \\ a+b=-e \\ ab=f \end{cases} \iff \begin{cases} e=-a-b \\ f=ab \\ c=a+b-ab \\ d=-(a+b)ab \\ a=-a-b+ab+(a+b)ab \dots\dots ① \\ b=-(a+b)ab(a+b-ab) \dots\dots ② \end{cases}$$

・ $b=0$ のとき

①より, $a=0$ であり, このとき,
 $c=d=e=f=0$

・ $b \neq 0$ のとき

②より,

$$1=-(a+b)a(a+b-ab) \dots\dots ③$$

a, b は整数だから, a は 1 の約数であり, $a=\pm 1$

$a=1$ のとき, ③より, $b=-2$ であり, このとき①も成り立ち,

$$c=1, d=-2, e=1, f=-2$$

$a=-1$ のとき, ③より, $b=0, \frac{3}{2}$ となり, 不適.

以上より, 答えは

$$\underline{\underline{(a, b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, -2, 1, -2, 1, -2)}}$$

(2)

$$(**) \iff \begin{cases} a_n, b_n \in \mathbb{Z} \\ a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n \dots\dots ④ \\ a_{n+1}b_{n+1} = b_n \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

(i) ⑤より「ある n について, $b_n \neq 0 \implies b_{n+1} \neq 0$ 」が成り立つから, 次の 2 つの場合以外ない.

(I) すべての n について, $b_n = 0$ である場合

当然, 与命題は成り立つ.

(II) 「ある $L \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq L$ ならば $b_n \neq 0$ 」である場合

$n \geq L$ とする. ⑤より, $|a_{n+1}||b_{n+1}| = |b_n|$ であり,

$$|a_{n+1}|, |b_{n+1}|, |b_n| \text{ は正整数だから, } |b_n| \geq |b_{n+1}|$$

ゆえに

$$|b_L| \geq |b_{L+1}| \geq |b_{L+2}| \geq \dots\dots > 0 \dots\dots ⑥$$

が成り立つが, 各 $|b_n|$ が正整数であることより, ⑥の $\geq$ のなかで $>$ となるものは有限個しかない.

よって, ある $m \in \mathbb{Z}$ が存在して,

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots\dots$$

である. (終)

(ii) (i)での場合分け(I), (II)を用いる.

(I) $b_n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) と④より, $a_{n+1} = -a_n$

$a_1 = k$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) とおくと, $a_n = k \cdot (-1)^{n-1}$ であり, この a_n, b_n は(**)を満たす.

(II) まず, 方程式 $x^2 + a_n x + b_n = 0$ が実数解をもつ.

条件より, $a_n^2 - 4b_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\dots\dots ⑦$

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots\dots = l \dots\dots ⑧ \text{ とおく. } (m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \text{ は定数})$$

$$\text{⑤より, } |a_{n+1}||b_{n+1}| = |b_n|$$

$$\text{これと⑧より, } n \geq m \text{ ならば, } |a_{n+1}| = 1 \text{ すなわち, } |a_n| = 1 \text{ } (n \geq m+1)$$

これと⑦より, $n \geq m+1$ ならば,

$$1 - 4b_n \geq 0 \therefore b_n \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{これと⑧より, } b_n = -l \quad (n \geq m+1)$$

$$\text{これと⑤より, } a_n = 1 \quad (n \geq m+2)$$

$$\text{これと④より, } b_n = -2 \quad (n \geq m+3)$$

ゆえに, $\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = -2 \end{cases}$ が $n \geq m+3$ において成り立つ.

また, ④, ⑤より,

$$\text{ある } n \text{ について, } \begin{cases} a_{n+1} = 1 \\ b_{n+1} = -2 \end{cases} \text{ なら } \begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = -2 \end{cases} \text{ が成り立つから,}$$

$$\text{結局すべての } n \text{ について, } \begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = -2 \end{cases} \text{ である.}$$

(I), (II)より, 答えは

$$\begin{cases} a_n = k \cdot (-1)^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{または, } \underline{\underline{\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = -2 \end{cases}}}$$