

## 理科系

平成 28 年度 入学試験問題・答案紙・数学公式集

# 数 学

(情—自然・理・医・工・農)

2 月 26 日(金) 10:00—12:30

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち問題紙 1 枚、答案紙 4 枚、数学公式集 3 枚)である。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは、退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。



# 問題紙

- 1 曲線  $y = x^2$  上に 2 点  $A(-2, 4)$ ,  $B(b, b^2)$  をとる。ただし  $b > -2$  とする。このとき、次の条件を満たす  $b$  の範囲を求めよ。

条件：  $y = x^2$  上の点  $T(t, t^2)$  ( $-2 < t < b$ ) で、 $\angle ATB$  が直角になるものが存在する。

- 2 2 つの円  $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$  と  $D: (x+2)^2 + y^2 = 7^2$  を考える。また原点を  $O(0, 0)$  とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 円  $C$  上に、 $y$  座標が正であるような点  $P$  をとり、 $x$  軸の正の部分と線分  $OP$  のなす角を  $\theta$  とする。このとき、点  $P$  の座標と線分  $OP$  の長さを  $\theta$  を用いて表せ。
  - (2) (1) でとった点  $P$  を固定したまま、点  $Q$  が円  $D$  上を動くとき、 $\triangle OPQ$  の面積が最大になるときの  $Q$  の座標を  $\theta$  を用いて表せ。
  - (3) 点  $P$  が円  $C$  上を動き、点  $Q$  が円  $D$  上を動くとき、 $\triangle OPQ$  の面積の最大値を求めよ。
- ただし(2), (3)においては、3 点  $O, P, Q$  が同一直線上にあるときは、 $\triangle OPQ$  の面積は 0 であるとする。

- 3 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋  $A, B$  があるとき、袋  $B$  から玉を 1 個取り出して袋  $A$  に入れ、次に袋  $A$  から玉を 1 個取り出して袋  $B$  に入れる、という操作を 1 回の操作と数えることにする。 $A$  に赤玉が 2 個、 $B$  に白玉が 2 個入った状態から始め、この操作を  $n$  回繰り返した後に袋  $B$  に入っている赤玉の個数が  $k$  個である確率を  $P_n(k)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1)  $k = 0, 1, 2$  に対する  $P_1(k)$  を求めよ。
- (2)  $k = 0, 1, 2$  に対する  $P_n(k)$  を求めよ。

- 4 次の問に答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

- (1) 次の条件(\*)を満たす整数  $a, b, c, d, e, f$  の組をすべて求めよ。

$$(*) \begin{cases} 2 \text{ 次方程式 } x^2 + ax + b = 0 \text{ の 2 つの解が } c, d \text{ である。} \\ 2 \text{ 次方程式 } x^2 + cx + d = 0 \text{ の 2 つの解が } e, f \text{ である。} \\ 2 \text{ 次方程式 } x^2 + ex + f = 0 \text{ の 2 つの解が } a, b \text{ である。} \end{cases}$$

- (2) 2 つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は、次の条件(\*\*)を満たすとする。

(\*\*) すべての正の整数  $n$  について、 $a_n, b_n$  は整数であり、2 次方程式  $x^2 + a_n x + b_n = 0$  の 2 つの解が  $a_{n+1}, b_{n+1}$  である。

このとき、

- (i) 正の整数  $m$  で、 $|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots$  となるものが存在することを示せ。
- (ii) 条件(\*\*)を満たす数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  の組をすべて求めよ。

1

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

32 数 学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

1

(解答欄)

2

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

32 数 学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

2 (解答欄)

3

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

32 数 学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

3 (解答欄)

4

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

32 数 学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

4 (解答欄)

# 数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって  
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ , ( $a, b, c$  は正または0)
2.  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3.  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5.  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , ( $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ )

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点  $x_1, x_2$  を  $m:n$  に内分する点, および外分する点:  $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ ,  $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$
7. 点  $(x_1, y_1)$  と直線  $ax + by + c = 0$  との距離, および点  $(x_1, y_1, z_1)$  と平面  $ax + by + cz + d = 0$  との距離:  
 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
8. 円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線:  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
9. 双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線:  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(ベクトルと行列)

10. 2つのベクトルのなす角:  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
11.  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , ( $ad-bc \neq 0$ )

(複 素 数)

12. 極形式表示:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , ( $r = |z|$ ,  $\theta = \arg z$ )
13.  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  に対し,  $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
14. ド・モアブルの公式:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  に対し,  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15.  $x^2 + px + q = 0$  の解が  $\alpha$ ,  $\beta$  のとき,  $\alpha + \beta = -p$ ,  $\alpha\beta = q$
16.  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  の解が  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  のとき,  $\alpha + \beta + \gamma = -p$ ,  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ ,  $\alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17.  $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$   
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
19.  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
20.  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
21.  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$   
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$   
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$   
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$
22.  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$   
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$   
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$   
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
23.  $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ , ( $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ )

(数 列)

24. 初項  $a$ , 公差  $d$ , 項数  $n$  の等差数列の和:  $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$ , ( $l = a + (n-1)d$ )
25. 初項  $a$ , 公比  $r$ , 項数  $n$  の等比数列の和:  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ , ( $r \neq 1$ )
26.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$34. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 \ (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \ (a \neq 0), \int_a^\beta (x - a)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - a)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \ (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列 ・ 組 合 せ)

$$40. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, \ (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, \ (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$



