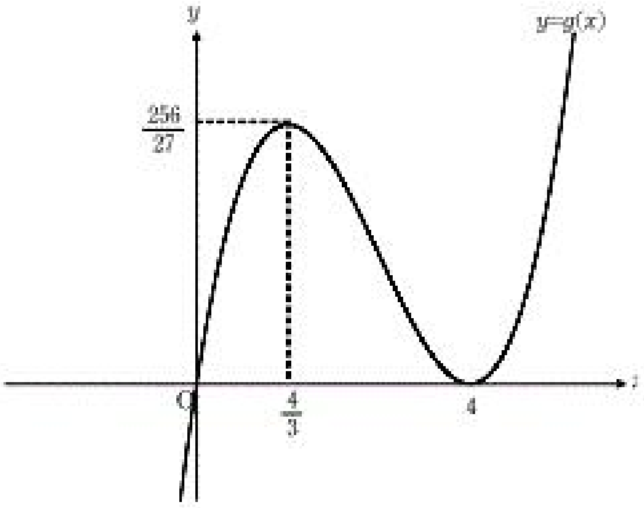
$\boxed{1}$

(1)

$$g(x)=x(x-4)^2$$
$$=x^3-8x^2+16x$$
$$g'(x)=3x^2-16x+16$$
$$=(3x-4)(x-4)$$

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	(極大)	$\searrow$	(極小)	$\nearrow$

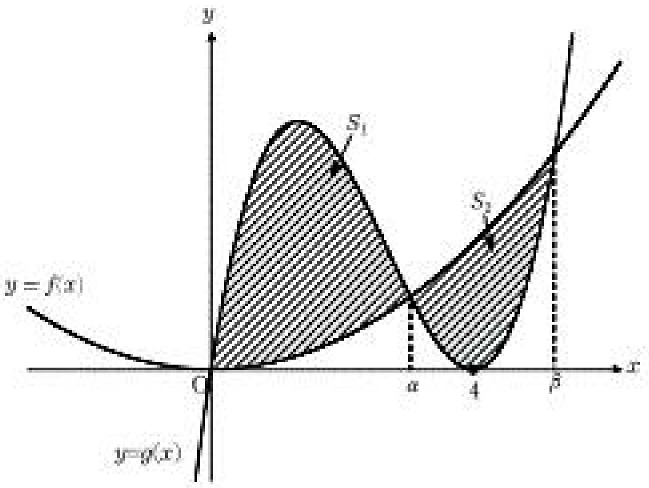


$$\begin{cases}(\text{極大値})=g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{256}{27}\\(\text{極小値})=g(4)=0\end{cases}\quad(\text{答})$$

グラフを描くと右図の通り．

(2) $f(x)=ax^2$ と $g(x)=x(x-4)^2$ を連立して，

$$x(x-4)^2=ax^2$$
$$\iff x\left\{\underline{x^2-(a+8)x+16}\right\}=0 \quad \cdots\cdots ①$$



______線部分について，

$x^2-(a+8)x+16=0$ は，

$$D=(a+8)^2-4\cdot16$$
$$=a^2+16a>0 \qquad (\because\ a>0)$$

$x\neq0$ の異なる 2 実数解　$x=\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta)$ をもつ．

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a+8>0\\\alpha\beta=16>0\end{cases}\quad\cdots\cdots②$$

より，　$0<\alpha<\beta$ と考えてよい．

①は異なる 3 つの実数解 $x=0,\alpha,\beta$ をもつ．

つまり，2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることが示された．

（証明終）

(3)　(2) のように S_1 と S_2 を定める．

$$S_1-S_2=\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx-\int_\alpha^\beta -x(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\int_0^\beta(x^3-\beta x^2)dx-\alpha\int_0^\beta x(x-\beta)dx$$
$$=\frac{\beta^4}{4}-\frac{\beta^4}{3}+\frac{\alpha}{6}\beta^3$$
$$=\frac{\alpha}{6}\beta^3-\frac{\beta^4}{12}=0$$
$$\therefore\ 2\alpha=\beta \qquad \cdots\cdots③$$

②，③より，

$$2\alpha^2=16 \qquad \therefore\ (\alpha,\beta)=\left(2\sqrt{2},4\sqrt{2}\right)$$
$$\therefore\ \underline{a=6\sqrt{2}-8\ \ (>0)\quad(\text{答})}$$

このとき，

$$① \iff x\left(x^2-6\sqrt{2}x+16\right)=0$$
$$\therefore\ \underline{x=0,2\sqrt{2},4\sqrt{2}\qquad(\text{答})}$$

$\boxed{2}$

(1)

$$p_2=0,\ q_2=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 6=\frac{2}{3},\ r_2=0$$

$$\underline{p_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},\ q_3=0,\ r_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\qquad(答)}$$

(2)

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots)\ \cdots\cdots①$$

$$\begin{aligned} q_{n+2}&=\frac{2}{3}p_{n+1}+r_{n+1} \\ &=\frac{4}{9}q_n+\frac{1}{3}q_n \\ &=\frac{7}{9}q_n\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots) \end{aligned}$$

ここで，　$q_1=0,\ q_2=\dfrac{2}{3}$ より，

$$\underline{q_n=\begin{cases} 0 & (n:奇数) \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n:偶数) \end{cases}\qquad(答)}$$

これを①に代入して，　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n$ より，

$$\underline{p_n=\begin{cases} \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:奇数) \\ 0 & (n:偶数) \end{cases}\ (n=2,3,4,\cdots\cdots)\qquad(答)}$$

$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n$ より，

$$\underline{r_n=\begin{cases} \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:奇数) \\ 0 & (n:偶数) \end{cases}\ (n=2,3,4,\cdots\cdots)\qquad(答)}$$

(3) $s_m=\dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ より，

$$s_m=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{2m-1-3}{2}}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}\quad(m=2,3,4,\cdots\cdots)$$

$$\underline{\left(ただし，s_1=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\right)\qquad(答)}$$

$\boxed{3}$

(1)　a, b, c は全て自然数で，　$1 \leqq a < b < c$ より，　$\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a} \qquad \therefore\ a < 6 \quad (a = 1, 2, 3, 4, 5) \leftarrow \left(\underline{\underline{\text{絞り込み}}}\right)$$

(i)　$a = 1$ のとき　$(1 < b < c)$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{1}{2} \qquad (\text{不適})$$

(ii)　$a = 2$ のとき　$(2 < b < c)$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \qquad (\text{不適})$$

(iii)　$a = 3$ のとき　$(3 < b < c)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6} \\ \iff\ & bc - 6b - 6c = 0 \\ \iff\ & (b-6)(c-6) = 36 \qquad (-3 < b-6 < c-6) \\ & (b-6, c-6) = (1, 36)(2, 18)(3, 12)(4, 9) \\ \therefore\ & (b, c) = (7, 42)(8, 24)(9, 18)(10, 15) \\ \therefore\ & (a, b, c) = (3, 7, 42)(3, 8, 24)(3, 9, 18)(3, 10, 15) \end{aligned}$$

(iv)　$a = 4$ のとき　$(4 < b < c)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \\ \iff\ & bc - 4b - 4c = 0 \\ \iff\ & (b-4)(c-4) = 16 \qquad (0 < b-4 < c-4) \\ & (b-4, c-4) = (1, 16)(2, 8) \\ \therefore\ & (b, c) = (5, 20)(6, 12) \\ \therefore\ & (a, b, c) = (4, 5, 20)(4, 6, 12) \end{aligned}$$

(v)　$a = 5$ のとき　$(5 < b < c)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10} \\ \iff\ & 3bc - 10b - 10c = 0 \\ \iff\ & (3b-10)(3c-10) = 100 \quad (5 < 3b-10 < 3c-10) \end{aligned}$$

これをみたす整数の組 $(3b-10, 3c-10)$ は存在せず．（不適）

以上，(i) 〜 (v)より，

$$\underline{\begin{aligned} (a, b, c) = & (3, 7, 42)(3, 8, 24)(3, 9, 18)(3, 10, 15) \\ & (4, 5, 20)(4, 6, 12) \qquad\qquad (\text{答}) \end{aligned}}$$

(2)　自然数の組 (a, b, c) を用いて，

$\begin{cases} pa = 2n \\ qb = 2n \\ rc = 2n \end{cases}$ をみたす組 (a, b, c) は 1 つ定まり，　$p = \dfrac{2n}{a}, q = \dfrac{2n}{b}, r = \dfrac{2n}{c}$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{2n}{a} > \dfrac{2n}{b} > \dfrac{2n}{c} \\ \dfrac{2n}{a} + \dfrac{2n}{b} + \dfrac{2n}{c} = n \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a < b < c \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \leftarrow ((1)\text{と同一の条件}) \cdots\cdots ①$$

①の組は(1)の結果はより，

$$\begin{aligned} (a, b, c) = & (3, 7, 42)(3, 8, 24)(3, 9, 18) \\ & (3, 10, 15)(4, 5, 20)(4, 6, 12) \end{aligned}$$

(i)　$(a, b, c) = (3, 7, 42)$ のとき

$p = \dfrac{2n}{3}, q = \dfrac{2n}{7}, r = \dfrac{2n}{42}\left(= \dfrac{n}{21}\right)$ より，　<u>n は 21 の倍数</u>

(ii)　$(a, b, c) = (3, 8, 24)$ のとき

$p = \dfrac{2n}{3}, q = \dfrac{2n}{8}\left(= \dfrac{n}{4}\right), r = \dfrac{2n}{24}\left(= \dfrac{n}{12}\right)$ より，<u>n は 12 の倍数</u>

(iii)　$(a, b, c) = (3, 9, 18)$ のとき

$p = \dfrac{2n}{3}, q = \dfrac{2n}{9}, r = \dfrac{2n}{18}\left(= \dfrac{n}{9}\right)$ より，　<u>n は 9 の倍数</u>

(iv)　$(a, b, c) = (3, 10, 15)$ のとき

$p = \dfrac{2n}{3}, q = \dfrac{2n}{10}\left(= \dfrac{n}{5}\right), r = \dfrac{2n}{15}$ より，　<u>n は 15 の倍数</u>

(v)　$(a, b, c) = (4, 5, 20)$ のとき

$p = \dfrac{2n}{4}\left(= \dfrac{n}{2}\right), q = \dfrac{2n}{5}, r = \dfrac{2n}{20}\left(= \dfrac{n}{10}\right)$ より，<u>n は 10 の倍数</u>

(vi)　$(a, b, c) = (4, 6, 12)$ のとき

$p = \dfrac{2n}{4}\left(= \dfrac{n}{2}\right), q = \dfrac{2n}{6}\left(= \dfrac{n}{3}\right), r = \dfrac{2n}{12}\left(= \dfrac{n}{6}\right)$ より，<u>n は 6 の倍数</u>

以上，(i) 〜 (vi)を全てみたす最小の自然数 n は，1260(最小公倍数)

$$\underline{\therefore\ M = 6\ \ ((\text{i}) \sim (\text{v})),\ n = 1260 \qquad (\text{答})}$$