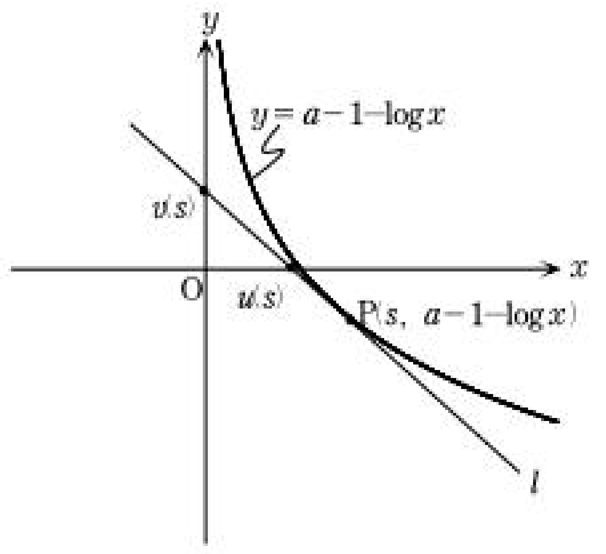
$\boxed{1}$

(1)



$$y=a-1-\log x \quad (x>0)$$
$$y'=-\frac{1}{x}$$

点 $\mathrm{P}\bigl(s,a-1-\log s\bigr)$ での接線 l は,

$$y=-\frac{1}{s}(x-s)+a-1-\log s$$
$$\Longleftrightarrow\ y=-\frac{1}{s}x+a-\log s$$

これより,

$$\underline{\begin{cases}u(s)=s(a-\log s)\\ v(s)=a-\log s\end{cases}\quad (s>0)\qquad (\text{答})}$$

(2) ◦ $u(s)=s(a-\log s)\quad (s>0)$ について,

$$u'(s)=a-\log s+s\left(-\frac{1}{s}\right)$$
$$=a-1-\log s$$
$$u''(s)=-\frac{1}{s}<0$$

s	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$	$(+\infty)$
$u'(s)$		$+$	0	$-$	
$u''(s)$		$-$	$-$	$-$	
$u(s)$	(0)	↗	e^{a-1} (極大)	↘	$(-\infty)$

$$\lim_{s\to+0}u(s)=0,\ \lim_{s\to+\infty}u(s)=-\infty$$
$$(\text{極大値})=u\bigl(e^{a-1}\bigr)=e^{a-1}$$

◦ $v(s)=a-\log s\quad (s>0)$ について,

$$v'(s)=-\frac{1}{s}<0$$
$$v''(s)=\frac{1}{s^2}>0$$

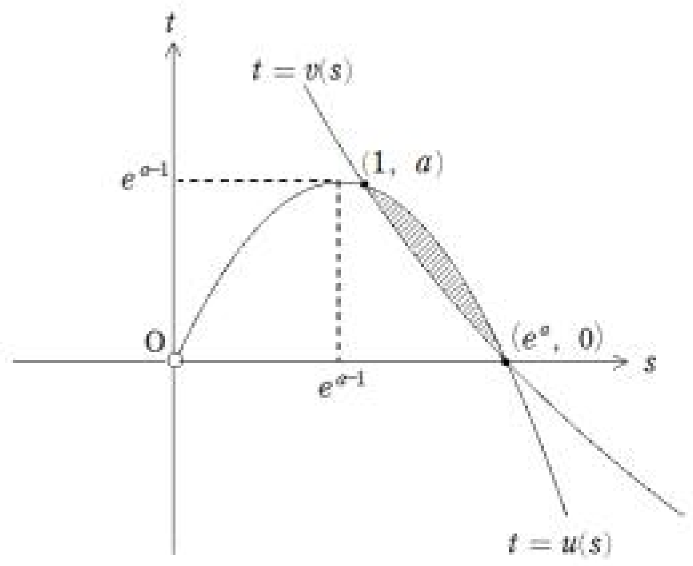
s	(0)	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$(+\infty)$
$v'(s)$			$-$		
$v''(s)$			$+$		
$v(s)$	$(+\infty)$		↘		$(-\infty)$

$$\lim_{s\to+0}v(s)=+\infty,\ \lim_{s\to+\infty}v(s)=-\infty$$

ここで,

$$u(s)=v(s)$$
$$\Longleftrightarrow\ s\bigl(a-\log s\bigr)=a-\log s$$
$$\Longleftrightarrow\ (s-1)\bigl(a-\log s\bigr)=0$$
$$\therefore\ s=1,e^a$$

2つの交点 $\bigl(1,a\bigr)\bigl(e^a,0\bigr)$ に注意してグラフを描くと,
右図の通り.



$$u(s)=v(s)$$
$$\Longleftrightarrow\ s\bigl(a-\log s\bigr)=a-\log s$$
$$\Longleftrightarrow\ (s-1)\bigl(a-\log s\bigr)=0$$
$$\therefore\ s=1,e^a$$

(3) 求める体積を V とする.

$$V=\underbrace{\int_0^a\pi s^2dt}_{t=u(s)}-\underbrace{\int_0^a\pi s^2dt}_{t=v(s)}$$
$$=\int_{e^a}^1\pi s^2\cdot(a-1-\log s)ds-\int_{e^a}^1\pi s^2\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)ds$$
$$=\pi\int_{e^a}^1 s^2(a-1-\log s)ds+\pi\int_{e^a}^1 s\,ds$$
$$=\pi\left[\frac{s^3}{3}(a-1-\log s)\right]_{e^a}^1+\pi\int_{e^a}^1\frac{s^2}{3}\,ds+\pi\int_{e^a}^1 s\,ds$$
$$=\pi\left\{\frac{1}{3}(a-1)+\frac{e^{3a}}{3}\right\}+\frac{\pi}{9}(1-e^{3a})+\frac{\pi}{2}(1-e^{2a})$$
$$=\underline{\left(\frac{2}{9}e^{3a}-\frac{1}{2}e^{2a}+\frac{a}{3}+\frac{5}{18}\right)\pi\qquad(\text{答})}$$

$\boxed{2}$

(1)

$$p_2=0,\ q_2=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 6=\frac{2}{3},\ r_2=0$$

$$\underline{p_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},\ q_3=0,\ r_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\qquad \text{(答)}}$$

(2)

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)\ \cdots\cdots①$$

$$\begin{aligned} q_{n+2}&=\frac{2}{3}p_{n+1}+r_{n+1} \\ &=\frac{4}{9}q_n+\frac{1}{3}q_n \\ &=\frac{7}{9}q_n \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots) \end{aligned}$$

ここで、　$q_1=0,\ q_2=\dfrac{2}{3}$ より，

$$\underline{q_n=\begin{cases} 0 & (n:\text{奇数}) \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n:\text{偶数}) \end{cases}\qquad \text{(答)}}$$

これを①に代入して，　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n$ より，

$$\underline{p_n=\begin{cases} \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:\text{奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}\ (n=2,3,4,\cdots\cdots)\qquad \text{(答)}}$$

$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n$ より，

$$\underline{r_n=\begin{cases} \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:\text{奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}\ (n=2,3,4,\cdots\cdots)\qquad \text{(答)}}$$

(3) $s_m=\dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ より，

$$s_m=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{2m-1-3}{2}}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}\quad (m=2,3,4,\cdots\cdots)$$

$$\underline{\left(\text{ただし},\ s_1=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\right)\qquad \text{(答)}}$$

(4) $t_2=(s_1)^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9},\ s_2=\dfrac{4}{27}$ より，

$$\underset{\left(\frac{3}{27}\right)}{t_2}<\underset{\left(\frac{4}{27}\right)}{s_2}$$

$t_3=(s_1\cdot s_2)\cdot 2=\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{27}\right)\cdot 2=\dfrac{8}{81},\ s_3=\dfrac{28}{243}$ より，

$$\underset{\left(\frac{24}{243}\right)}{t_3}<\underset{\left(\frac{28}{243}\right)}{s_3}$$

$(m\geqq 4)$

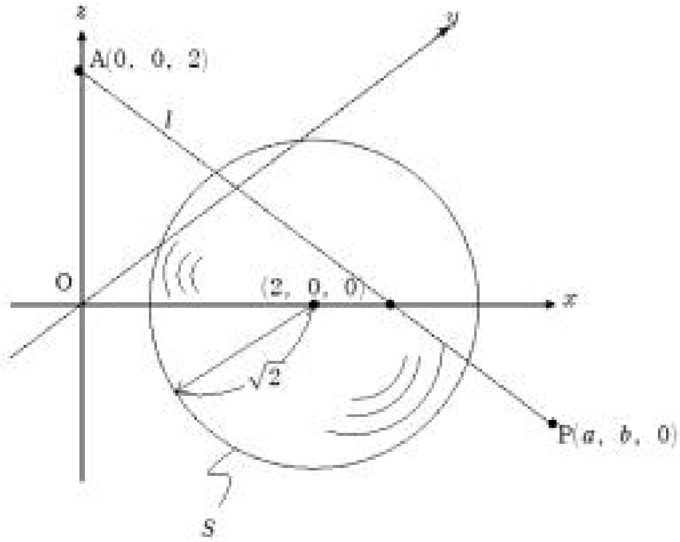
$$\begin{aligned} t_m&=\sum_{k=1}^{m-1}s_k\cdot s_{m-k} \\ &=(s_1\cdot s_{m-1})\cdot 2+\sum_{k=2}^{m-2}s_k\cdot s_{m-k} \\ &=\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}\right\}\cdot 2+\sum_{k=2}^{m-2}\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-2}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-k-2} \\ &=\frac{8}{81}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\sum_{k=2}^{m-2}\frac{16}{729}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \\ &=\frac{8}{81}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\frac{16(m-3)}{729}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \\ &=\frac{8(2m+1)}{729}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \frac{t_m}{s_m}&=\frac{\dfrac{8(2m+1)}{729}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{m-4}}{\dfrac{4}{27}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{m-2}} \\ &=\frac{2}{27}(2m+1)\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} \\ &=\frac{6}{49}(2m+1)>1\quad (\because\ m\geqq 4)\ \text{つまり},\ \underline{\underline{t_m>s_m}}\ \text{(不適)} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

(1)



$$\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AP}$$
$$\iff \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=t\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$\iff \overrightarrow{OQ}=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OP}$$
$$=(1-t)(0,0,2)+t(a,b,0)$$
$$\therefore\ \underline{\mathrm{Q}\left(at,bt,2(1-t)\right)}\qquad(答)$$

(2)　球面S：$(x-2)^2+y^2+z^2=2$ ……①

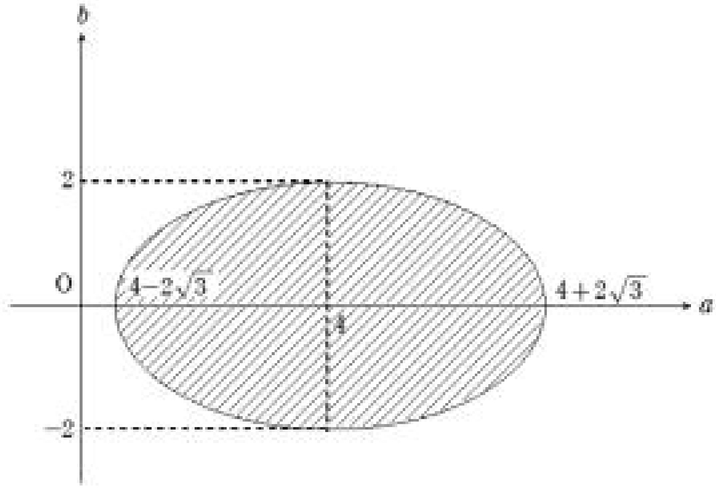
$\mathrm{Q}\left(at,bt,2(1-t)\right)$ を①に代入.

$$(at-2)^2+b^2t^2+4(1-t)^2=2$$
$$\iff \underset{(+)}{\underline{\underline{(a^2+b^2+4)}}}t^2-4(a+2)t+6=0 \quad\cdots\cdots②$$

②が異なる2実数解をもてばよい.

$$D/4=4(a+2)^2-6\left(a^2+b^2+4\right)>0$$
$$\iff \frac{(a-4)^2}{12}+\frac{b^2}{4}<1$$

(右図の斜線部分. ただし, 境界は含まず)

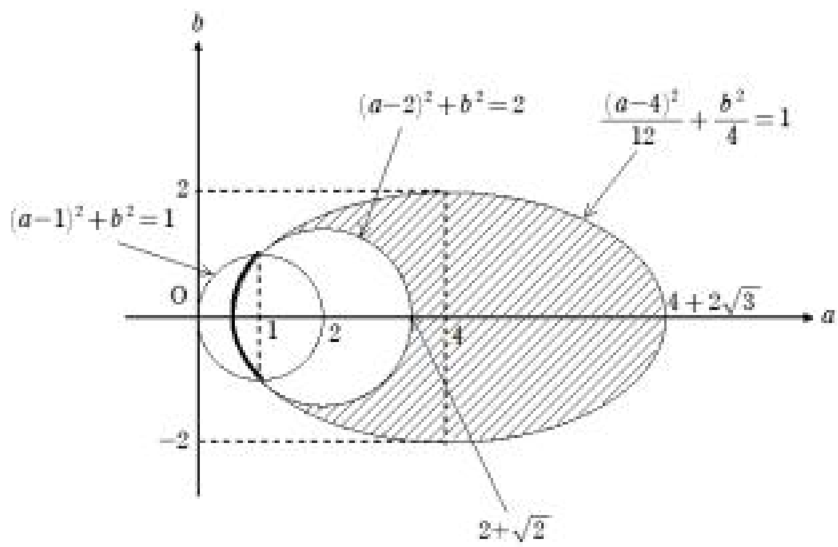


(3)　$Q_z=2(1-t)>0\quad t<1$

②が$t<1$に異なる2実数解をもてばよい.

$$\begin{cases}\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1\\[2mm]\dfrac{2(a+2)}{a^2+b^2+4}<1\\[2mm]a^2+b^2+4-4(a+2)+6>0\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1\\[2mm](a-1)^2+b^2>1\\[2mm](a-2)^2+b^2>2\end{cases}$$

図示すると, 右図の斜線部分. ただし, 境界線は含まず.



$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}=1\text{と}(a-1)^2+b^2=1\text{は}(1,\pm1)\text{を通り,}\\[2mm]\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}=1\text{と}(a-2)^2+b^2=2\text{は}(1,\pm1)\text{で接する}\end{array}\right)$$

$\boxed{4}$

(1) $z \in M$ $(M \neq \phi)$ より，(Ⅱ)から，$\dfrac{1}{z}, -z$ も M の要素である．

(Ⅲ)より，　$z \cdot \dfrac{1}{z} \in M, -z \cdot \dfrac{1}{z} \in M$ となるので，　$\pm 1 \in M$　　（証明終）

(2) $z \in M$ $(M \neq 0)$ に対して，$-z$ $(\neq z)$ も M の要素となり，この2つの集合 $\underbrace{\{z, -z\}\text{(部分集合)の和集合}}_{\text{(共通なものはなし)}}$ となるため，M の要素の数 n は偶数．　（証明終）

(3) $n=4$ のとき，　$M=\{\pm 1, \pm z\}$ $(z \neq \pm 1)$ とおける．

(Ⅲ)より，　$z^2=1, z^2=-1, z^2=z, z^2=-z$ より，$z \neq 0, \pm 1$ を考えれば，

$z^2=-1$ より，　$z=\pm i$　つまり，$M=\{\pm 1, \pm i\}$ となり，(<u>一意的に定まる</u>)

いずれの要素も条件(Ⅰ)～(Ⅲ)をみたす．

$\therefore$ $\underline{M=\{\pm 1, \pm i\}}$　(答)

(4) $n=6$ のとき，　$M=\{\pm 1, \pm z, \pm w\}$ $(z \neq \pm 1, z \neq \pm w, w \neq \pm 1)$

ここで，　zw も M の要素より，$z \neq \pm 1, w \neq \pm 1$ から，　$\underline{\underline{zw=\pm 1}}$

$$\therefore\ M=\left\{\pm 1, \pm z, \pm \frac{1}{z}\right\}\ (z \neq \pm 1)$$

ここで，　$z^2 \in M$ より，

$$z^2=\pm\frac{1}{z} \iff z^3 \mp 1=0$$
$$\iff (z \mp 1)(z^2 \pm z+1)=0$$
$$\therefore\ z=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

つまり，　$M=\left\{\pm 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right\}$ となり，(一意的に定まる)

いずれの要素も条件(Ⅰ)～(Ⅲ)をみたす．

$$\therefore\ \underline{M=\left\{\pm 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right\}\quad \text{(答)}}$$