

1

(1)

$$\begin{aligned} l: 3x+2y+4=0 \\ m: x-2y+4=0 \\ n: ax+by=0 \end{aligned} > \text{交点 } P(-2, 1)$$

と3本の直線をおく。

右図のように、 l と n 、 m と n の交点を Q 、 R とすると
 $l \nparallel n$, $m \nparallel n$, n が $P(-2, 1)$ を通らないもとので、

$$(2a \neq 3b, b \neq -2a, b \neq 2a \dots\dots \textcircled{1})$$

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{4b}{2a-3b}, -\frac{4a}{2a-3b}\right) \text{ の } x \text{ 成分 } \underline{Q_x} > -2 \\ R\left(-\frac{4b}{2a+b}, \frac{4a}{2a+b}\right) \text{ の } x \text{ 成分 } \underline{R_x} > -2 \end{aligned} \quad \text{だから}$$

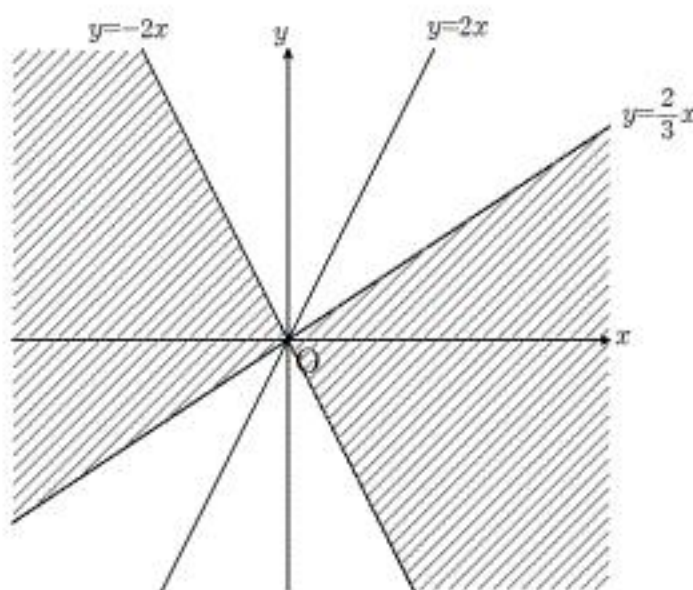
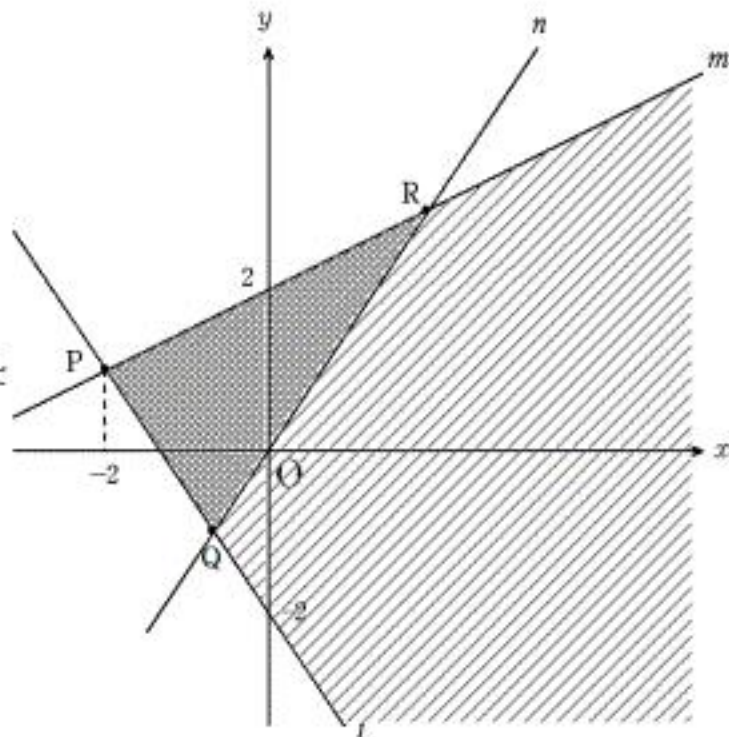
$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{4b}{2a-3b} > -2 \\ \frac{4b}{2a+b} < 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{2a-b}{2a-3b} > 0 \\ \frac{b-2a}{2a+b} < 0 \end{cases} \quad \text{(異符号)} \\ &\iff \begin{cases} 2a-b > 0 \\ 2a-3b > 0 \\ 2a+b > 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} 2a-b < 0 \\ 2a-3b < 0 \\ 2a+b < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

これをみたす点 (a, b) を xy 平面上に図示すると
 右図の通り。(図の斜線部分、ただし境界は含まず)

条件をまとめて

$$\underline{(2a-3b)(2a+b) > 0} \quad (\text{答})$$

($\textcircled{1}$ をみたす)



(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \left(\frac{4b}{2a-3b} + 2, -\frac{4a}{2a-3b} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{2(2a-b)}{2a-3b}, -\frac{3(2a-b)}{2a-3b} \right) \\ &= \frac{2a-b}{2a-3b} (2, -3) \\ \overrightarrow{PR} &= \left(-\frac{4b}{2a+b} + 2, \frac{4a}{2a+b} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{2(2a-b)}{2a+b}, \frac{2a-b}{2a+b} \right) \\ &= \frac{2a-b}{2a+b} (2, 1) \\ \therefore S = \triangle PQR &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2a-b)^2}{\underbrace{(2a+b)(2a-3b)}_{((1)より正)}} |2 - (-6)| \\ &= \underline{\underline{\frac{4(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)}}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} S-4 &= \frac{4(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)} - 4 \\ &= \frac{4(2a-b)^2 - 4(2a+b)(2a-3b)}{(2a+b)(2a-3b)} \\ &= \frac{16b^2}{\underbrace{(2a+b)(2a-3b)}_{((1)より正)}} \geq 0 \\ \therefore S &\geq 4 \quad (\text{題意は示された}) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

(1) α と β は文字の対称性により入れ替えが可

(i) 1 つだけ奇数のとき, $\begin{cases} \alpha = (\text{奇数}) \\ \beta = (\text{偶数}) \end{cases}$ としてよい

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\text{奇数}) + (\text{偶数}) + (\text{偶数}) = (\text{奇数})$$

(ii) 2 つとも奇数のとき, $\begin{cases} \alpha = (\text{奇数}) \\ \beta = (\text{奇数}) \end{cases}$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\text{奇数}) + (\text{奇数}) + (\text{奇数}) = (\text{奇数})$$

以上(i), (ii)より題意は示された。(証明終)

(2) $n = (\text{奇数})$ として, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n$ ……①をみたす整数 α, β が存在するとする.

(1)の結果より, $\begin{cases} \alpha = (\text{偶数}) \\ \beta = (\text{偶数}) \end{cases}$ となる以外にない. よって, $\begin{cases} \alpha = 2l \\ \beta = 2m \end{cases}$ (l, m は整数) と表せて,

①へ代入すると

$$(2l)^2 + 2l \cdot 2m + (2m)^2 = 2n$$

$$\iff 2(l^2 + lm + m^2) = n \quad (\underline{n \text{ は偶数となり矛盾}})$$

よって, 題意は示された。(証明終)

(3) $x^3 - 2018x + c = 0$ ……②

②をみたす整数解 x が 2 個以上存在すると仮定する. $x = \alpha, \beta$ ($\alpha \neq \beta$)

$$\begin{cases} \alpha^3 - 2018\alpha + c = 0 \\ \beta^3 - 2018\beta + c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha^3 - \beta^3 - 2018(\alpha - \beta) = 0$$

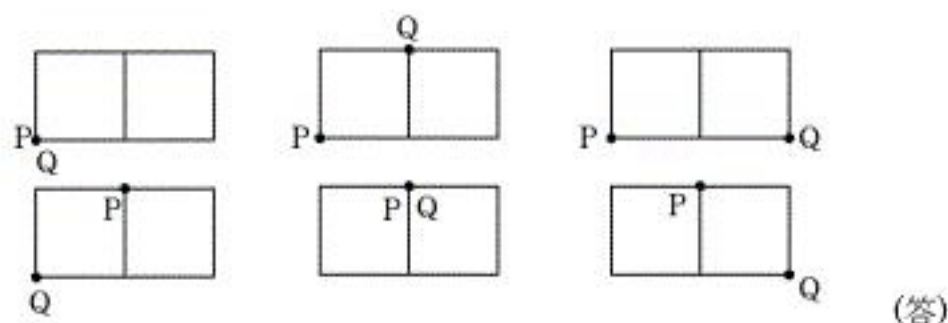
$$\iff (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - 2018(\alpha - \beta) = 0$$

$$\iff \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2018 \quad (\because \alpha - \beta \neq 0)$$

$$\iff \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2 \cdot \frac{1009}{\text{奇数}} \leftarrow \underline{((2)の結果に矛盾)}$$

よって, ②をみたす整数解は高々 1 個である。(証明終)

(1) (時刻 1)

(2) (1)を用いて考える $\left(\text{上記の6つはすべて同様に確からしく} \frac{1}{6} \right)$

$$a_1 = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$b_1 = p_1 - a_1 = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$a_2 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 3 \right) + b_1 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 2 \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$b_2 = a_1 \cdot \frac{1}{6} + b_1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}} \quad (\text{答})$$

(3) (2)と同様に考えれば,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 3 \right) + b_n \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 2 \right) \\ b_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{6} + b_n \cdot \frac{1}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases} \quad (a_0 = 1, b_0 = 0 \text{ とし } n \geq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $b_n = p_n - a_n \Leftrightarrow p_n = a_n + b_n$

①より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) a_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) b_n \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leq \frac{3}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n = \frac{3}{4}(a_n + b_n) \\ & \quad \uparrow \\ & \quad (a_n \geq 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

これより, $p_{n+1} \leq \frac{3}{4}p_n$ ($p_0 = a_0 + b_0 = 1$)

$$\therefore p_n \leq \frac{3}{4}p_{n-1} \leq \left(\frac{3}{4} \right)^2 p_{n-2} \leq \cdots \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n p_0$$

$$\therefore p_n \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n \text{ は示された (証明終)}$$