

(1) 求める面積は

$$\begin{aligned}
 I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx \\
 &= \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \dots\dots\dots \textcircled{1} \text{ (証明終)}$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ において、 $0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$

$$\text{ここで、 } 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1 \text{ より、 } 0 \leq \frac{x^{n+1}}{x^2+1} \leq \frac{x^n}{x^2+1}$$

$$\therefore 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \quad (0 \leq I_{n+1} \leq I_n \dots\dots\dots \textcircled{2})$$

さらに、 $\textcircled{1}$ より $I_n \geq 0, I_{n+2} \geq 0$ から $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ なので、 $\textcircled{2}$ と合わせて

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \dots\dots\dots \textcircled{3} \text{ (証明終)}$$

(3) $\textcircled{3}$ より、 $n \geq 3$ に対して、

$$\begin{aligned}
 &I_{n+2} \leq I_n \leq I_{n-2} \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{I_n + I_{n+2}}_{\parallel \frac{1}{n+1}} \leq I_n + I_n \leq \underbrace{I_{n-2} + I_n}_{\parallel \frac{1}{n-1}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)} \\
 &(\text{最左辺}) \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \\
 &(\text{最右辺}) \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$ (答)

(4) $\textcircled{1}$ で $n = 2k-1$ ($k \geq 1$) を代入

$$\begin{aligned}
 I_{2k-1} + I_{2k+1} &= \frac{1}{2k} \\
 \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2k} \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot (I_{2k-1} + I_{2k+1}) \\
 &= (I_1 + I_3) - (I_3 + I_5) + (I_5 + I_7) - (I_7 + I_9) + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1} (I_{2n-1} + I_{2n+1}) \\
 &= I_1 + (-1)^{n-1} I_{2n+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで、 } I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} I_{2n+1} = 0$ ($\because \textcircled{3}$)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \underbrace{(-1)^{n-1} I_{2n+1}}_{\rightarrow 0} \right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \log 2}} \text{ (答)}$$

(1) $y = a^x$ と $y = \log_a x$ の共有点の座標を (α, β) とおく. ← 「 $\beta = \alpha$ を示す」

$$\begin{cases} \beta = a^\alpha \\ \beta = \log_a \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \log_a \beta \\ \beta = \log_a \alpha \end{cases}$$

(i) $\alpha > \beta$ のとき $\alpha - \beta = \log_a \beta - \log_a \alpha > 0 \therefore \beta > \alpha$ (矛盾)

(ii) $\beta > \alpha$ のとき $\beta - \alpha = \log_a \alpha - \log_a \beta > 0 \therefore \alpha > \beta$ (矛盾)

以上(i), (ii)より, $\alpha > \beta$ または $\beta > \alpha$ のとき矛盾. つまり $\beta = \alpha$ となり, $y = x$ 上にある. (題意は示された) (証明終)

(2) (1)の結果より

$$\begin{cases} y = a^x \\ y = \log_a x \end{cases} (x > 0) \iff \begin{cases} y = x \\ y = \log_a x \end{cases} (x > 0)$$

そこで, $\log_a x = x \ (x > 0) \iff \log_a x - x = 0 \ (x > 0)$

$f(x) = \log_a x - x \ (a > 1, x > 0)$ とおく.

$$f'(x) = \frac{1}{x \log a} - 1 = \frac{1 - x \log a}{x \log a}$$

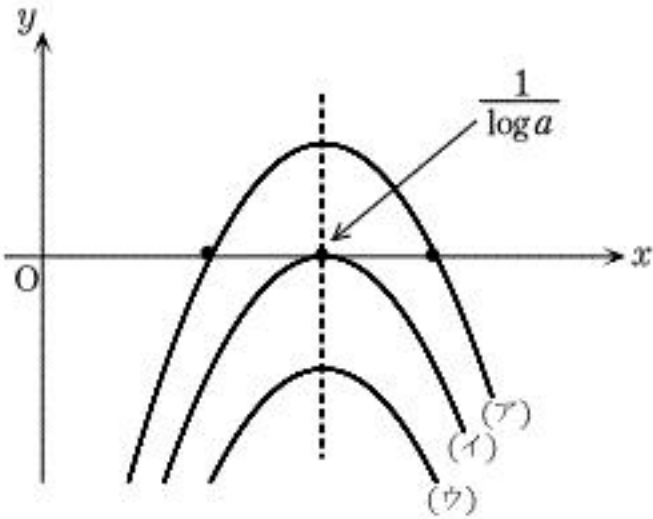
x	(0)		$\frac{1}{\log a}$		$(+\infty)$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	(最大値)	$\searrow$	$(-\infty)$

$$f\left(\frac{1}{\log a}\right) = \log_a \frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log a} \text{ (最大値)}$$

(ア), (イ), (ウ) のいずれのケースにおいても, $y = f(x)$ と x 軸との共有点の数は高々2個.

よって, 題意は示された. (証明終)

とおく.



(3) (2)より共有点が1つのとき, $x = \frac{1}{\log a}$

$$f\left(\frac{1}{\log a}\right) = 0$$

$$\iff \log_a \frac{1}{\log a} = \frac{1}{\log a}$$

$$\iff \frac{\log \frac{1}{\log a}}{\log a} = \frac{1}{\log a}$$

$$\iff \log \frac{1}{\log a} = 1$$

$$\iff \frac{1}{\log a} = e$$

$$\therefore \underline{\underline{a = e^{\frac{1}{e}}}} \text{ (答)}$$

さらに, 共有点の座標は, (e, e) (答)

(1)

$$\begin{aligned}
 (a+b)^p - a^p - b^p &= {}_p C_0 a^0 b^p + {}_p C_1 a^1 b^{p-1} + {}_p C_2 a^2 b^{p-2} + \cdots + {}_p C_{p-1} a^{p-1} b^1 + \underbrace{{}_p C_p a^p b^0 - a^p - b^p}_{\substack{\uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow}} \\
 &= {}_p C_1 a^1 b^{p-1} + {}_p C_2 a^2 b^{p-2} + \cdots + {}_p C_{p-1} a^{p-1} b^1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

ここで、 $1 \leq k \leq p-1$ に対して

$$\begin{aligned}
 {}_p C_k &= \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = \frac{p}{k} \cdot {}_{p-1} C_{k-1} \\
 &= p \cdot \underbrace{\frac{{}_{p-1} C_{k-1}}{k}}_{\text{(自然数)}}
 \end{aligned}$$

より、 ${}_p C_k$ ($1 \leq k \leq p-1$) は p の倍数。

これと①より、 $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れる。(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}
 (a+2)^p - a^p &= {}_p C_0 a^0 2^p + {}_p C_1 a^1 2^{p-1} + {}_p C_2 a^2 2^{p-2} + \cdots + {}_p C_{p-1} a^{p-1} 2^1 + \underbrace{{}_p C_p a^p 2^0 - a^p}_{\substack{\uparrow \\ \uparrow}} \\
 &= 2 \left({}_p C_0 a^0 2^{p-1} + {}_p C_1 a^1 2^{p-2} + {}_p C_2 a^2 2^{p-3} + \cdots + {}_p C_{p-1} a^{p-1} \right) \\
 &= 2 \times (\text{整数}) \quad (\text{証明終}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

(3) $(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割った余りは、 ${}_p C_0 a^0 2^{p-1} + {}_p C_1 a^1 2^{p-2} + {}_p C_2 a^2 2^{p-3} + \cdots + {}_p C_{p-1} a^{p-1}$ を p で割った余りを用いて考える。 $p \geq 3$ のもとで考える。

$$\begin{aligned}
 &{}_p C_0 a^0 2^{p-1} + \underbrace{{}_p C_1 a^1 2^{p-2} + {}_p C_2 a^2 2^{p-3} + \cdots + {}_p C_{p-1} a^{p-1}}_{\substack{\uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \text{(} p \text{ の倍数)}}} \\
 &= 2^{p-1} + p \cdot N \quad (N: \text{整数}) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

ここで、(1)の結果を用いて $a=1, b=1$ を代入

$$\begin{aligned}
 2^p - 2 &= p \cdot M \quad (M: 2 \text{ を素因数にもつ整数}) \\
 \iff 2^{p-1} &= p \cdot \frac{M}{2} + 1 \\
 &= p \cdot M' + 1 \quad (M': \text{整数})
 \end{aligned}$$

これを③へ代入して、

$$\begin{aligned}
 {}_p C_0 a^0 2^{p-1} + {}_p C_1 a^1 2^{p-2} + {}_p C_2 a^2 2^{p-3} + \cdots + {}_p C_{p-1} a^{p-1} &= (p \cdot M' + 1) + p \cdot N \\
 &= p \cdot (M' + N) + 1 \quad \leftarrow (p \text{ で割った余り } 1) \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad \textcircled{2} \text{ より } \underline{\underline{(2p \text{ で割った余り } "2")}}
 \end{aligned}$$

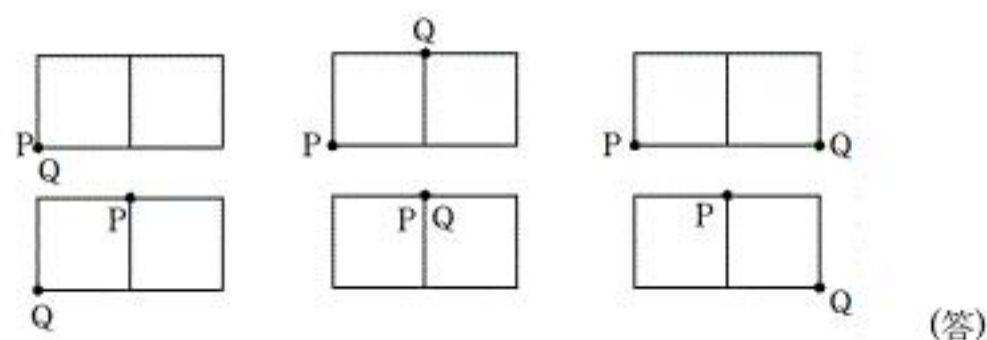
次に、 $p=2$ (素数) のときは、

$$(a+2)^2 - a^2 = 4a + 4 = 2 \cdot 2 \cdot (a+1) \quad \leftarrow \underline{\underline{(2p \text{ で割った余り } "0")}}$$

以上まとめて、

$$(a+2)^2 - a^2 \text{ を } 2p \text{ で割ったときの余りは } \begin{cases} 0 & (p=2 \text{ のとき}) \\ 2 & (p \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(1) (時刻 1)

(2) (1)を用いて考える $\left(\text{上記の6つはすべて同様に確からしく} \frac{1}{6} \right)$

$$a_1 = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$b_1 = p_1 - a_1 = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$a_2 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 3 \right) + b_1 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 2 \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$b_2 = a_1 \cdot \frac{1}{6} + b_1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}} \quad (\text{答})$$

(3) (2)と同様に考えれば,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 3 \right) + b_n \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 2 \right) \\ b_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{6} + b_n \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases} \quad (a_0 = 1, b_0 = 0 \text{ とし } n \geq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (\text{答})$$

(4) $b_n = p_n - a_n \Leftrightarrow p_n = a_n + b_n$

①より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) a_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) b_n \\ &= \frac{2}{3} a_n + \frac{3}{4} b_n \leq \frac{3}{4} a_n + \frac{3}{4} b_n = \frac{3}{4} (a_n + b_n) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(a_n \geq 0 \text{ より})} \uparrow$

これより, $p_{n+1} \leq \frac{3}{4} p_n$ ($p_0 = a_0 + b_0 = 1$)

$$\therefore p_n \leq \frac{3}{4} p_{n-1} \leq \left(\frac{3}{4} \right)^2 p_{n-2} \leq \cdots \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n p_0$$

$$\therefore p_n \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n \text{ は示された (証明終)}$$