$\boxed{1}$

(1)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos\theta} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin\theta)-\log(1-\sin\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \log\left(2+\sqrt{3}\right) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

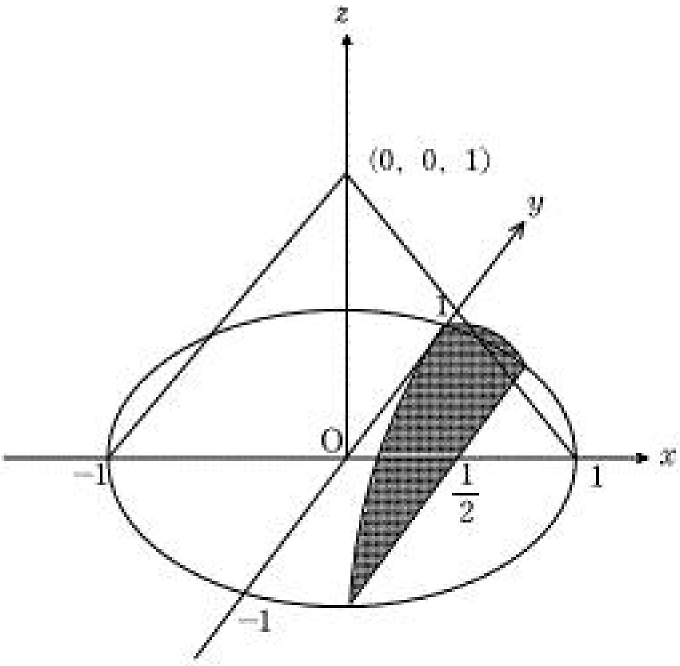
(2)

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n\theta} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan\theta)' \cdot \frac{1}{\cos^{n-2}\theta}d\theta \\
&= \left[\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\cdot(n-2)\cdot\frac{(-\sin\theta)}{\cos^{n-1}\theta}d\theta \\
&= \sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta \\
&= \sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\left(I_n-I_{n-2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ I_n=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}}{n-1}\ (n\geqq 3) \qquad \text{(答)}
$$

(3) 直円錐の $z=t$ 面 $\left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)$ での切り口を面積を $T(t)$ として求める.

$z=t$ 面での切り口の図のように角 θ を定めると,

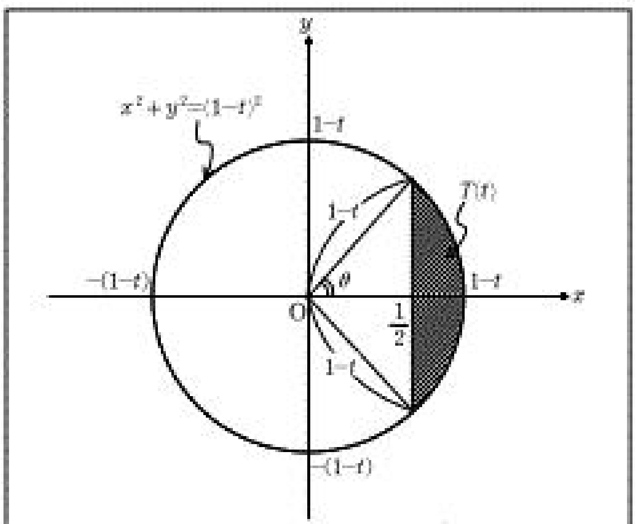


$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\frac{1}{2}}{1-t} \\
&= \frac{1}{2(1-t)}
\end{aligned}
$$

ここで, $0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ の変化に伴い

$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1$ と変化に注意.

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{2}(1-t)^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}(1-t)^2\sin 2\theta \\
&= \frac{1}{2}(1-t)^2(2\theta-\sin 2\theta)
\end{aligned}
$$



$z=t$ 面での切り口 $\left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)$

したがって, 求める立体 S の体積(V)は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{1}{2}} T(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^2(2\theta-\sin 2\theta)dt
\end{aligned}
$$

ここで, $\cos\theta=\frac{1}{2(1-t)}$ より, $-\sin\theta d\theta=\frac{1}{2(1-t)^2}dt$

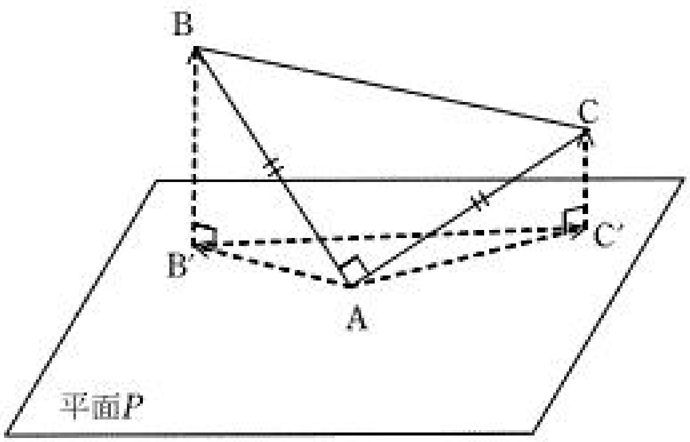
t	$0 \to \frac{1}{2}$
θ	$\frac{\pi}{3} \to 0$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ V &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2(2\theta-\sin 2\theta)\cdot\left\{-2\sin\theta\cdot\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2\right\}d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}(2\theta-\sin 2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{3}\cos^{-3}\theta\right)'\cdot\theta\, d\theta-\frac{1}{8}\left(I_3-I_1\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3\right)-\frac{1}{8}I_3+\frac{1}{8}I_1 \\
&= \frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}\cdot\left\{\frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\right\}+\frac{1}{8}\log\left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}\log\left(2+\sqrt{3}\right) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

$$
\left(
\begin{aligned}
I_1 &= \log\left(2+\sqrt{3}\right) \\
I_2 &= \sqrt{3} \\
I_3 &= \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}
\end{aligned}
\right)
$$

$\boxed{2}$

(1)



$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{C'C}\\
&=\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}+\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}\right)\\
&=2\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{0}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}\\
&=\overrightarrow{AB'}\cdot\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AC'}\cdot\left(\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AB}\right)\\
&=\underbrace{\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{CC'}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BB'}}_{0}\\
&=0
\end{aligned}
$$

（証明終）

(2)　(1)より，

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{C'C}=0\\
\iff\ &\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}=-\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{C'C}
\end{aligned}
$$

ここで，　$\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{C'C}=\left|\overrightarrow{B'B}\right|\left|\overrightarrow{C'C}\right|\cos 0>0$

つまり，　$\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}<0$ となり，　$\angle B'AC'>\dfrac{\pi}{2}$ は示された．　（証明終）

(3)　(2)より，$B'C'=7$　($AB'=4,\ AC'=\sqrt{21}$ としても一般性は失わない)

余弦定理を用いて，

$$
\begin{aligned}
&49=16+21-2\cdot 4\cdot\underbrace{\sqrt{21}\cos\angle B'AC'}_{\left(\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}\right)}\\
\iff\ &\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}=-6\\
\therefore\ &\left|\overrightarrow{B'B}\right|\left|\overrightarrow{C'C}\right|=\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{C'C}=-\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}=6
\end{aligned}
$$

ここで，　$\left|\overrightarrow{B'B}\right|=h$　(>0) とすると，$\left|\overrightarrow{C'C}\right|=\dfrac{6}{h}$

$$
\begin{aligned}
&AB^2=AC^2\\
\iff\ &h^2+4^2=\left(\frac{6}{h}\right)^2+\left(\sqrt{21}\right)^2\\
\iff\ &h^4-5h^2-36=0\\
\iff\ &(h^2-9)(h^2+4)=0\qquad\therefore\ h^2=9\quad(h=3)\\
&\therefore\ AB=\sqrt{9+16}=5\qquad\text{（答）}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

(1) $[\sqrt{n}]=m$ $(\geqq 1)$ とおく．$\sqrt{n}$ は整数ではないので，

$$m<\sqrt{n}<m+1$$

$$\therefore\ m^2<n<(m+1)^2$$

つまり，　$n=m^2+1, m^2+2, m^2+3, \cdots\cdots, m^2+2m$ で調べる．

ただし，　$\sqrt{m^2+1}, \sqrt{m^2+2}\cdots\cdots$ の小数第 1 位が "0" を見つけるためには

この中で最小の $\sqrt{m^2+1}$ だけを考えればよい．

$$m<\sqrt{m^2+1}<m+\frac{1}{10}$$

$$\therefore\ m^2<m^2+1<m^2+\frac{1}{5}m+\frac{1}{100}\quad\left(\begin{array}{l} m^2+1<m^2+\frac{1}{5}m+\frac{1}{100} \text{ より} \\ m>\frac{99}{20}=4.95 \end{array}\right)$$

これより，$m=5, 6, 7, \cdots\cdots$ と順に調べる．

$(m=5)$ $\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$ について，　$5.01=\sqrt{25.1001}<\sqrt{26}<\sqrt{26.01}=5.1$

（小数第 1 位は "0"
小数第 2 位は "0" 以外）

n の最小性より，　$n=26$　　　　（答）

(2)　(1)と同様に調べてみると，

$m=5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\cdots$　に応じて，

$n=26, 37, 50, 65, 82, 101, 122, 145, \cdots\cdots$

ただし，　$m=10, 11$ のケースでは，$\sqrt{m^2+2}$　についても条件を満たす．

$$10.01=\sqrt{100.2001}<\sqrt{102}<\sqrt{102.01}=10.1$$

$$11.01=\sqrt{121.2201}<\sqrt{123}<\sqrt{123.21}=11.1$$

よって，

$$n=\underset{(1)}{26}, \underset{(2)}{37}, \underset{(3)}{50}, \underset{(4)}{65}, \underset{(5)}{82}, \underset{(6)}{101}, \underset{(7)}{102}, \underset{(8)}{122}, \underset{(9)}{123}, \underset{(10)}{145}$$

$\therefore\ n=145$　　　（答）

$\boxed{4}$

(1) $n=3$ のとき，

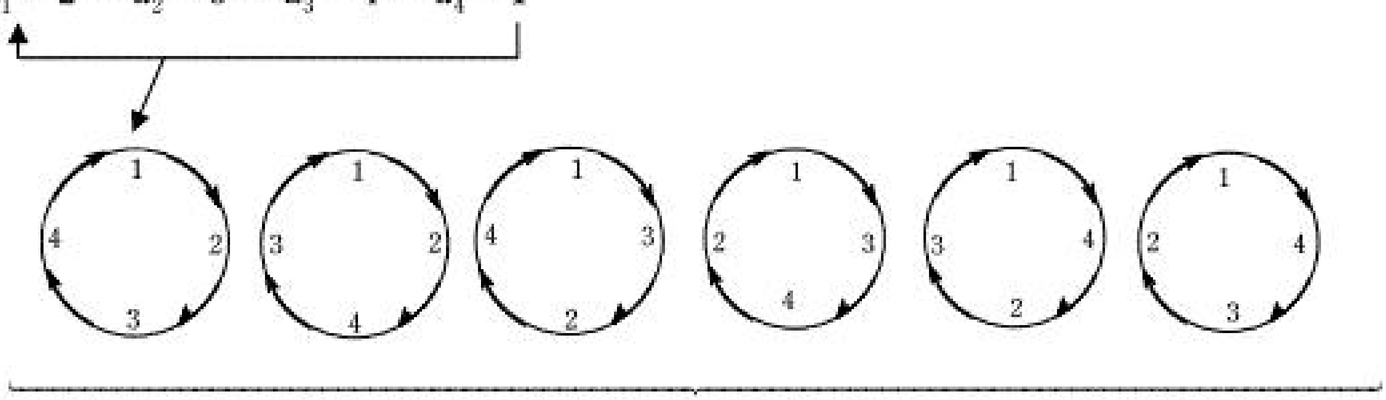
$$(a_1, a_2, a_3)=(^\circ 1,2,3)(^\circ 1,3,2)(^\circ 2,1,3)(2,3,1)$$
$$(3,1,2)(^\circ 3,2,1)$$

長さ1のサイクルを含むのは ° 印の4通り．$P=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ （答）

(2) $a_1 \neq 1, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4$ に注意して並べると，

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(2,3,4,1)(2,4,1,3)(3,4,2,1)(3,1,4,2)$$
$$(4,3,1,2)(4,1,2,3)$$
（答）

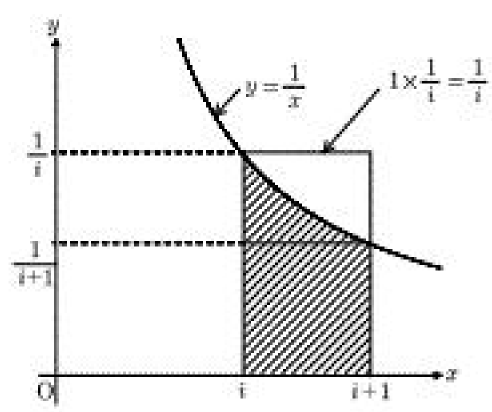
（例）$a_1=2 \to a_2=3 \to a_3=4 \to a_4=1$



（6個の円順列を参考にして考える）

(3)

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$
$$>\sum_{i=k}^{n}\int_i^{i+1}\frac{dx}{x}$$
$$=\int_k^{n+1}\frac{dx}{x}$$
$$=\log(n+1)-\log k$$
（証明終）



$\left(\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x} \text{ は } x>0 \text{ で単調減少} \\ \text{区間は } [i,\ i+1] \text{ で面積評価} \end{array}\right)$

(4) 長さ $n-k$ $\left(0 \leqq k \leqq \dfrac{n-1}{2}\right)$ のサイクルを含む順列の数を b_k

ここで，$2(n-k)>n$ より，長さ $n-k$ のサイクルは1つだけと考えてよい．

$$\therefore\ b_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}\cdot(n-k-1)!\cdot k!$$

（数を選ぶ）（円順列）（それ以外の数の並び）

$$\therefore\ p=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}\cdot(n-k-1)!\cdot k!}{n!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n-k}$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}$$
$$=\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\frac{1}{j}>\log(n+1)-\log\frac{n+1}{2}=\log 2 \quad (\because\ (3))$$
$$\therefore\ p>\log 2$$
（証明終）