

理科系

平成 31 年度 入学試験問題・答案紙・数学公式集

数 学

(情—自然, コン・理・医・工・農)

2 月 26 日(火) 10:00—12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち問題紙 1 枚、答案紙 4 枚、数学公式集 3 枚)である。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは、退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問題紙

1 正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする。

(1) I_1 を求めよ。必要ならば $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$ を使ってよい。

(2) $n \geq 3$ のとき, I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。 D を底面とし, 点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。 C を平面 $x = \frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき, 小さい方を S とする。 z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

2 空間内に $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり, 点 B と点 C は P 上にはなく, P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B', C' とする。

(1) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$ を示せ。

(2) $\angle B'AC' > \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) P 上の三角形 $AB'C'$ の辺の長さは短いものから 4, $\sqrt{21}$, 7 であった。このとき, 辺 AB の長さを求めよ。

3 正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく, それを 10 進法で表すと, 小数第 1 位は 0 であり, 第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

4 正の整数 n に対して $1, 2, \dots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ とする。この $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対し, 各添字 $i = 1, 2, \dots, n$ について, a_i の値が j であるとき, その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \rightarrow a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow \dots$ のようにたどり, それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき,

(i) $a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 5 \rightarrow a_5 = 4 \rightarrow a_4 = 1 \rightarrow a_1 = 2$

(ii) $a_3 = 6 \rightarrow a_6 = 3 \rightarrow a_3 = 6$

(iii) $a_7 = 7 \rightarrow a_7 = 7$

となり, どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル, 列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1) $n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2) $n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ。

(4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\frac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。

1

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

1 (解答欄)

2

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

2 (解答欄)

3

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

3

(解答欄)

4

理科系

受 験 番 号				

32 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

4 (解答欄)

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

$$1. \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, (a, b, c \text{ は正または } 0)$$

$$2. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

(三 角 形)

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$4. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$5. S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, (s = \frac{1}{2}(a+b+c))$$

(図 形 と 式)

$$6. \text{数直線上の2点 } x_1, x_2 \text{ を } m:n \text{ に内分する点, および外分する点: } \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

$$7. \text{点 } (x_1, y_1) \text{ と直線 } ax + by + c = 0 \text{ との距離, および点 } (x_1, y_1, z_1) \text{ と平面 } ax + by + cz + d = 0 \text{ との距離:}$$

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$8. \text{ だ円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$9. \text{ 双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

(ベ ク ト ル)

$$10. \text{ 2つのベクトルのなす角: } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

(複 素 数)

11. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
12. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
13. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

16. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
18. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
20. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$
21. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
22. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数 列)

23. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$, ($l = a + (n-1)d$)
24. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\ldots$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$28. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$29. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$30. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$31. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$32. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$33. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$34. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$35. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$36. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} (a \neq 0), \int_a^\beta (x - a)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - a)^3$$

$$37. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$38. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$39. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$40. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$41. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1 - p)$$

$$42. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$

