

I (理)

N は正の整数とし、 p は $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ をみたす実数とする。A、B の 2 人が引き分けのないゲームで対戦し、続けて $2N + 1$ 試合を行う。それぞれの試合で A が勝つ確率は p 、B が勝つ確率は $1 - p$ とする。またそれぞれの試合の勝敗は他の試合の勝敗とは独立であるものとする。

- (1) A が、 $2N + 1$ 試合のうちちょうど k 回勝つ確率を $f(k)$ とする。ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots, 2N + 1$ である。このとき

$$\frac{1-p}{p} f(N+1) = f(N) \quad \text{および} \quad \frac{1-p}{p} f(N+2) \geq f(N-1)$$

を示せ。

- (2) $2N + 1$ 試合のうち勝った試合数の多いほうを優勝とし、A、B が優勝する確率をそれぞれ P_A, P_B とする。このとき、 $\frac{1-p}{p} P_A \geq P_B$ を示せ。

- (3) $P_A \geq p$ を示せ。

II (理)

$f(x)$ は微分可能な関数で $f(0)=f(1)=0$ をみたし、 $|f'(x)|$ は
区間 $0 \leq x \leq 1$ で最大値 M をとるものとする.

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) \leq Mx$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) \leq M(1-x)$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{M}{4}$ を証明せよ.

Ⅲ (理・環)

a は $-1 < a < 1$ をみたす実数とする. 複素数 z に対して

$$w = \frac{z - ai}{1 + aiz}$$

とおく. ここで, i は虚数単位とする.

- (1) 複素数平面上で, 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき,
点 w はどのような図形をえがくか.
- (2) 複素数平面上で, 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円の内部を動くとき,
複素数 w のとりうる値の範囲を求めよ.

IV (理・環)

数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

は次の条件 (イ), (ロ) をみたすものとする.

(イ) n が奇数のとき, $a_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

(ロ) n が偶数のとき, $a_n > 0$ かつ $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$

(1) n が偶数のとき, a_n を求めよ.

(2) n が 3 以上の奇数のとき, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ がなりたつことを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

V (環)

a, b を整数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ を考える. A の逆行列の成分がすべて整数となるような a, b の組は存在するか, 存在しないかを述べよ. さらに, 存在するときはその組の例を挙げ, 存在しないときはそのことを証明せよ.