

I (理)

放物線 $C: y = x^2$ を考える. $s > 1$ とする. C 上の 4 点 $P(2, 4)$, $P'(-2, 4)$, $Q(s, s^2)$, $Q'(t, t^2)$ は互いに異なる点であり, 直線 QQ' は点 $(1, 4)$ を通るとする.

(1) s と t のみたす関係式を求めよ.

(2) $t < 1$ を示せ.

(3) 直線 PQ と直線 $P'Q'$ の交点 $R(\alpha, \beta)$ は直線 $y = 2x - 4$ の上にあることを示せ.

II (理)

n を正の整数とする. 曲線 $y = \log x$ 上の点で, その x 座標が $1 + \frac{k}{n}$ である点を P_k とする. ただし, k は n 以下の正の整数とする.

(1) 点 P_k における $y = \log x$ の法線と x 軸との交点を Q_k とする. 点 Q_k の座標を求めよ.

(2) 原点と点 Q_k を結ぶ線分の長さを l_k とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n l_k$$

を求めよ.

Ⅲ (理・環)

- (1) α, β は $\alpha \neq \beta$ をみたす複素数とし, θ は $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする. 複素数平面上で, 点 α を点 β のまわりに θ 回転した点を表す複素数を γ とする. γ を α と β と θ を用いて表せ.
- (2) $\alpha = i$ (i は虚数単位) とする. 点 α を原点のまわりに 60° 回転した点を表す複素数を β とする. 点 α を点 β のまわりに 45° 回転した点を表す複素数を γ とする. γ の実部と虚部を求めよ.

IV (理・環)

- (1) 0 以上の整数 a, b が $a > b$ をみたすとき

$$2^{a-1} \leq 2^a - 2^b < 2^a$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 0 以上の整数 k, l, m, n が $k > l, m > n$ かつ

$$2^k - 2^l = 2^m - 2^n$$

をみたすとき, $k = m$ かつ $l = n$ であることを示せ.

V (環)

xy 平面上で、原点を中心とする半径 2 の円を C とし、直線 $y = ax + 1$ を l とする。ただし、 a は実数である。

- (1) 円 C と直線 l は異なる 2 点で交わることを示せ。
- (2) 円 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし、点 P における円 C の接線と点 Q における円 C の接線との交点を R とする。 a が実数全体を動くとき、点 R の軌跡を求めよ。