

I

(1)

点Dは線分BCを2:1に内分するため、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{3}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{1}{3}(0, 2, 0) + \frac{2}{3}(0, 0, 3) \\ &= \left(0, \frac{2}{3}, 2\right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \left(0, \frac{2}{3}, 2\right)$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(0, \frac{2}{3}, 2\right) - (1, 0, 0) \\ &= \left(-1, \frac{2}{3}, 2\right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \left(-1, \frac{2}{3}, 2\right)$$

(3)

点Eは直線AD上にあるため、ある実数 s を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AD} \\ &= (1, 0, 0) + s\left(-1, \frac{2}{3}, 2\right) \\ &= \left(1-s, \frac{2}{3}s, 2s\right)\end{aligned}$$

と表すことができる。また、 $\overrightarrow{OE}$ と $\overrightarrow{AD}$ は直交していることから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(1-s, \frac{2}{3}s, 2s\right) \cdot \left(-1, \frac{2}{3}, 2\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow s-1+\frac{4}{9}s+4s &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{49}{9}s &= 1 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{9}{49}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OE}$ は、

$$\overrightarrow{OE} = \left(\frac{40}{49}, \frac{6}{49}, \frac{18}{49}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{40}{49}, \frac{6}{49}, \frac{18}{49}\right)$$

II

(1)

α, β は 2 次方程式 $x^2 - 12x + 2n - 1 = 0$ の 2 解であるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 13 \\ \alpha\beta = 2n - 1 \end{cases}$$

となる。ここで、 $\alpha > 0$ であることを、背理法を用いて証明する。

[1] $\alpha = 0$ のとき

$\alpha\beta = 0$ となり、 $n \neq \frac{1}{2}$ より $\alpha\beta = 2n - 1$ に矛盾する。よって $\alpha \neq 0$ である。

[2] $\alpha < 0$ のとき

$\alpha + \beta = 13$ より $\beta > 0$ となる。ここで、 n は自然数なので

$$\alpha\beta = 2n - 1 > 0$$

である。ところが $\alpha < 0, \beta > 0$ より、

$$\alpha\beta < 0$$

となり、矛盾する。よって $\alpha < 0$ ではない。

以上[1], [2]より、 $\alpha > 0$ である。

β についても、 α と同様に考えると $\beta > 0$ となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

p, q はそれぞれ α, β を超えない最大の整数であるから、

$$\alpha - 1 < p \leq \alpha$$

$$\beta - 1 < q \leq \beta$$

が成立する。この 2 式を足すと、(1)の考察より $\alpha + \beta = 13$ であるから、

$$\alpha + \beta - 2 < p + q \leq \alpha + \beta$$

$$\Leftrightarrow 11 < p + q \leq 13$$

$$\therefore p + q = 12, 13 \quad (\because p, q \text{ は整数})$$

となる。ここで、 $p + q = 13$ ではないことを背理法で示す。 $p + q = 13$ と仮定すると、

$$\begin{cases} p = \alpha \\ q = \beta \end{cases}$$

であり、(1)の考察より、

$$\alpha\beta = 2n - 1$$

である。ここで、 n は自然数であるから、 $2n - 1$ は奇数である。したがって、 $\alpha\beta$ は奇数であり、 α, β のどちらも奇数である。したがって、 $\alpha + \beta$ は偶数となるが、これは $\alpha + \beta = 13$ であることに矛盾する。よって、 $p + q \neq 13$ であるから、 $p + q = 12$ となる。

(証明終)

(3)

p, q は素数であり、かつ $p + q = 12$ となることから、考えられる p, q の組は

$$(p, q) = (5, 7), (7, 5)$$

である。 $\alpha < \beta$ と考えても一般性を失わないことから、 $(p, q) = (5, 7)$ となる場合のみを考える。2 次方程式 $x^2 - 13x + 2n - 1 = 0$ を解くと、

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{173 - 8n}}{2}$$

となるが、 $\alpha < \beta$ であることから、

$$\alpha = \frac{13 - \sqrt{173 - 8n}}{2}$$

となる。(2)の考察より、 $\alpha - 1 < p \leq \alpha$ であるから、

$$\frac{11 - \sqrt{173 - 8n}}{2} < 5 \leq \frac{13 - \sqrt{173 - 8n}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{173 - 8n} < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{41}{2} < n \leq \frac{43}{2}$$

$$\therefore n = 21$$

となる。このとき、 $1 \leq \sqrt{173 - 8n} < 3$ より $\beta = \frac{13 + \sqrt{173 - 8n}}{2}$ も $\beta - 1 < q \leq \beta$ を満たす。よって、

題意を満たす (p, q, n) の組は $(5, 7, 21), (7, 5, 21)$ である。

(答) $(p, q, n) = (5, 7, 21), (7, 5, 21)$

III

(1)

三角形の内接円の中心を O として, $\triangle ABC$ の面積を $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の3つに分けて考える。それぞれの面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} AB \times r$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} BC \times r$$

$$\triangle OCA = \frac{1}{2} CA \times r$$

となる。これらを全て足し合わせると,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} (AB + BC + CA) \times r \\ &= \frac{1}{2} l r \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ である二等辺三角形なので, A から BC におろした垂線の足を H とおくと, H は辺 BC の中点となる。また, 三平方の定理より

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AB^2 - BH^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{l-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{l^2 - 2lx}}{2} \end{aligned}$$

であるから, S_1 は l と x を用いて

$$S_1 = \frac{x\sqrt{l^2 - 2lx}}{4}$$

と表すことが出来る。ここで, (1)の結果より,

$$S_1 = \frac{1}{2} l r$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l r &= \frac{x\sqrt{l^2 - 2lx}}{4} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{x}{2l} \sqrt{l^2 - 2lx} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{x}{2l} \sqrt{l^2 - 2lx}$$

(3)

$S_2 = \pi r^2$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{2\pi r}{l} \\ &= \frac{\pi x}{l^2} \sqrt{l^2 - 2lx} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi x}{l^2} \sqrt{l^2 - 2lx}$$

(4)

ABC が三角形となるための条件は,

$$\begin{aligned} 0 < x < l - x \\ \Leftrightarrow 0 < x < \frac{l}{2} \end{aligned}$$

である。ここで, $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{l^2} \sqrt{l^2 x^2 - 2lx^3}$ より, $f(x) = l^2 x^2 - 2lx^3$ とおくと, $f(x)$ が $0 < x < \frac{l}{2}$ の範囲で最大になるとき, $\frac{S_2}{S_1}$ も最大になる。ここで,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2l^2 x - 6lx^2 \\ &= 2lx(l - 3x) \end{aligned}$$

であるので, $f'(x) = 0$ を満たす x は $x = \frac{l}{3}$ である。したがって, $f(x)$ についての増減表は以下の通りである。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{l}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{l}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{l^4}{27}$	$\searrow$	(0)

増減表より, $f(x)$ は $x = \frac{l}{3}$ のときに最大値 $f\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{l^4}{27}$ をとる。よって, $\frac{S_2}{S_1}$ の最大値は

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{l^4}{27}} \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{l}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

IV

(1)

2次方程式 $x^2 + (m-1)x + m^2 + m - 2 = 0$ が異なる2つの実数解を持つことから、判別式を D とおくと $D > 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} D &= (m-1)^2 - 4(m^2 + m - 2) \\ &= -3m^2 - 6m + 9 \\ &= -3(m+3)(m-1) > 0 \\ &\Leftrightarrow -3 < m < 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-3 < m < 1$

(2)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 - m \\ \alpha\beta = m^2 + m - 2 \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (1-m)^2 - 2(m^2 + m - 2) \\ &= -m^2 - 4m + 5 \end{aligned}$$

となる。

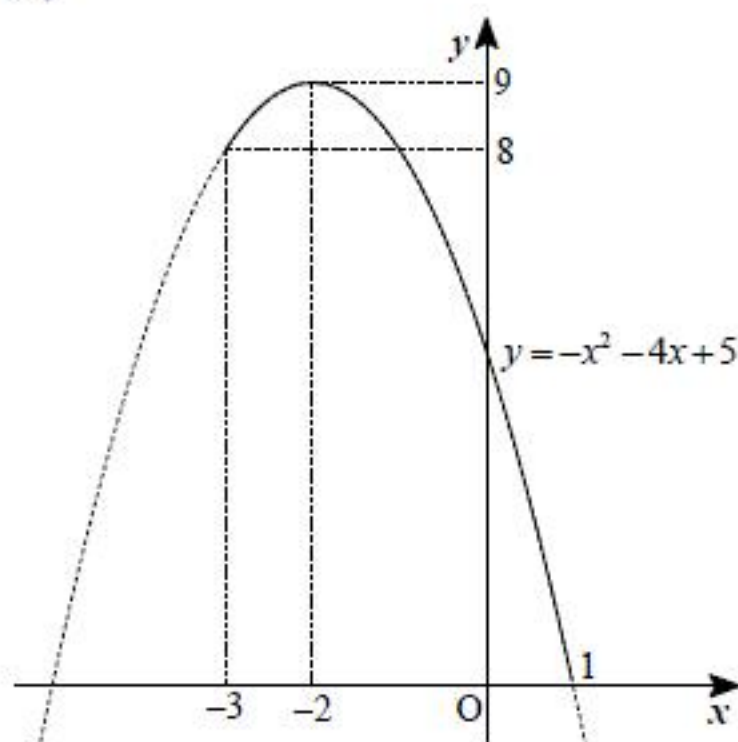
(答) $-m^2 - 4m + 5$

(3)

$\alpha^2 + \beta^2$ を平方完成すると、

$$\alpha^2 + \beta^2 = -(m+2)^2 + 9$$

となる。ここで、 $\alpha^2 + \beta^2 = y$, $m = x$ とおき、図示すると次のようになる。また、(1)の結果より、 m は $-3 < m < 1$ を満たす。



よって、 $\alpha^2 + \beta^2$ のとり得る範囲は $0 < \alpha^2 + \beta^2 \leq 9$ である。

(答) $0 < \alpha^2 + \beta^2 \leq 9$

(1)

箱の中に6個の玉が入っている状態から2個の玉を取り出す場合の組み合わせは、

$${}_6C_2 = 15$$

より、15通りである。そのうち、取り出した玉がともに黒玉である場合は1通りのみであるから、求める確率は $\frac{1}{15}$ となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{15}$$

(2)

(1)と同様に考えると、取り出した玉が2つとも赤玉、白玉である確率もそれぞれ $\frac{1}{15}$ である。

したがって、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \right) = \frac{4}{5}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{5}$$

(3)

袋Aに入れた玉が異なる色であるとき、箱に残っている4つの玉のうち、2つは同じ色であり、他は異なる色である。同じ色の玉を区別するとき、この箱の中から2つの玉を取り出す組み合わせの総数は、

$${}_4C_2 = 6$$

より、6通りである。また、袋B、Cの中にある玉がどちらも違う色となるのは、箱の中に同じ色の玉がある色の玉を1つだけ取り出した場合なので、その取り出し方は

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 4$$

より、4通りである。以上と(2)の結果より、求める確率は、

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{15}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{15}$$

VI

(1)

点Pは線分CNを $t:1$ に内分しているから、

$$\overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{PN}$$

である。また、点Nは辺ABを $1-s:s$ に内分しているから、

$$\overrightarrow{PN} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{CP}$ は s, t を用いて

$$\overrightarrow{CP} = st\vec{a} + (1-s)t\vec{b}$$

と表される。また、問題文より

$$\overrightarrow{CP} = k\vec{a} + l\vec{b}$$

と表されるため、

$$k\vec{a} + l\vec{b} = st\vec{a} + (1-s)t\vec{b}$$

となる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるから、係数を比較すると、

$$\begin{cases} k = st \\ l = (1-s)t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{k}{k+l} \\ t = k+l \end{cases}$$

となる。

$$(答) (s, t) = \left(\frac{k}{k+l}, k+l \right)$$

(2)

点Pは $\triangle ABC$ の内部の点であるから、 $0 < s < 1, 0 < t$ が成り立つ。また、(1)の結果より、

$$\begin{cases} k = st \\ l = (1-s)t \end{cases}$$

である。ここで、 $s > 0, t > 0$ より、

$$k = st > 0$$

である。また、 $s < 1$ より、 $1-s > 0, t > 0$ であるので、

$$l = (1-s)t > 0$$

となる。よって、 k と l は正の数である。

(証明終)

(3)

$AM:MC = u:1-u$ とおく。ただし、 $0 < u < 1$ である。すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= u\overrightarrow{PC} + (1-u)\overrightarrow{PA} \\ &= u(-k\vec{a} - k\vec{b}) + (1-u)\vec{a} \\ &= (1-u-uk)\vec{a} - uk\vec{b} \end{aligned}$$

となる。ここで、3点B, P, Mは一直線上にあるので、 $\overrightarrow{PM}$ は $\vec{b}$ の整数倍で表すことができる。

また、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので、

$$1-u-uk = 0$$

となる。(2)の結果より、 k は正の数なので $k \neq -1$ であることから、

$$u = \frac{1}{1+k}$$

と変形できる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MC} &= u:1-u \\ &= \frac{1}{1+k}:\frac{k}{1+k} \\ &= 1:k \end{aligned}$$

となる。

(答) $1:k$