

I

(1)

(i)

p, q, r が全て奇数である時、それぞれ整数 p', q', r' を用いて

$$p = 2p' + 1, q = 2q' + 1, r = 2r' + 1$$

と表すことができるので

$$\begin{aligned} pqr &= (2p' + 1)(2q' + 1)(2r' + 1) \\ &= 2\{4p'q'r' + 2(p'q' + q'r' + r'p') + (p' + q' + r')\} + 1 \end{aligned}$$

となり、 pqr も奇数となる。逆に pqr が奇数の時、 p, q, r のうち一つ以上が偶数だと仮定すると整数 n を用いて

$$pqr = 2n$$

と表せるが、これは pqr が奇数ということに反するので、 p, q, r は全て奇数である。よって題意は示された。

(証明終)

(ii)

命題は偽である。反例は $p = q = 1, r = 2$ のとき。

(証明終)

(2)

(i)

和が 5 となる 3 数の組み合わせは $(1, 1, 3), (1, 2, 2)$ であるから、求める場合の数は

$$3 + 3 = 6 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 6 通り

(ii)

和が 5 以下となる 2 数の組み合わせは

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3)$$

であり、これらを (a, b) に当てはめれば一意的に $a + b - c = 0$ となる c が決定する。よって求める場合の数は

$$4 \cdot 2 + 2 = 10 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 10 通り

(iii)

a, b, c の選び方は

$$5^3 = 125 \text{ (通り)}$$

である。積 abc が奇数となる時、 a, b, c は全て奇数であるから、その場合の数は

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

となる。積 abc が偶数となる場合の数は、この余事象を考えて

$$125 - 27 = 98 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 98 通り

II

(1)

仮定より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON}}{5} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + 3 \cdot \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{3}}{5} \\ &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{5}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

全ての点 P に対して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG} \\ &= \overrightarrow{PO} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{5} \\ &= \frac{(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OE})}{5} \\ &= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE}}{5}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE}| &= r \\ \Leftrightarrow |5\overrightarrow{PG}| &= r \\ \therefore |\overrightarrow{PG}| &= \frac{r}{5}\end{aligned}$$

となるから、求める図形は半径 $\frac{r}{5}$ ，中心 G の球である。

(答) 半径 $\frac{r}{5}$ ，中心 G の球

Ⅲ

(1)

与式より

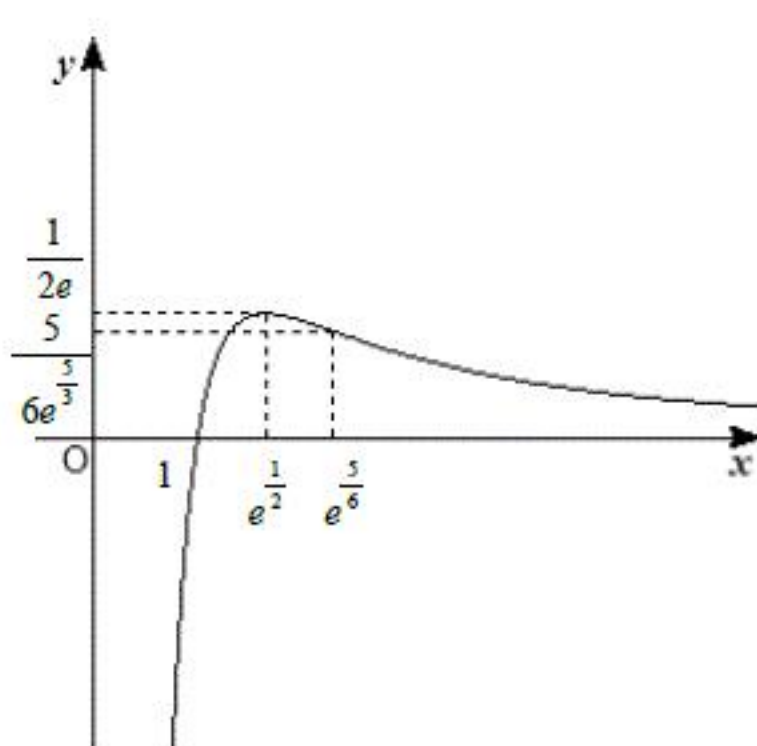
$$f'(x) = \frac{x - 2x \log x}{x^4} = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 3x^2(1 - 2 \log x)}{x^6} = \frac{6 \log x - 5}{x^4}$$

となるから、 $y = f(x)$ の増減表は下の通り。

x	0	...	$e^{\frac{1}{2}}$	...	$e^{\frac{5}{6}}$	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$	↘

増減表と $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ からグラフの概形は下のようになる。



(答) 極大値 $\frac{1}{2e} \left(x = e^{\frac{1}{2}} \right)$, 極小値なし, 変曲点 $\left(e^{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}} \right)$

(2)

$P(p, ap^2)$ とおく。点 P において $y = f(x)$, $y = ax^2$ が接するので

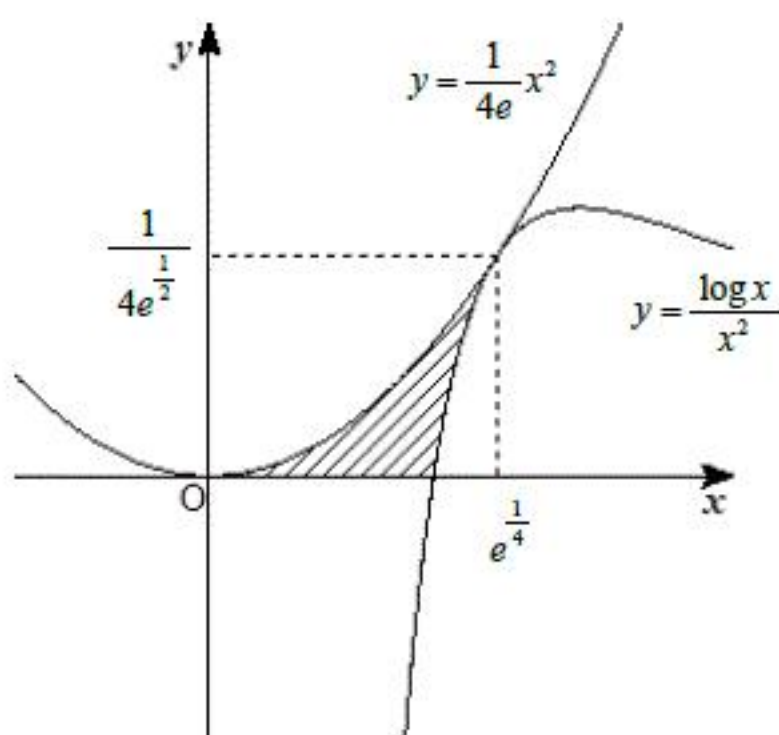
$$\begin{aligned} \begin{cases} f(p) = ap^2 \\ f'(p) = 2ap \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log p}{p^2} = ap^2 \\ \frac{1 - 2 \log p}{p^3} = 2ap \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log p = ap^4 \\ 1 - 2 \log p = 2ap^4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log p = \frac{1}{4} \\ ap^4 = \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow p = e^{\frac{1}{4}}, a = \frac{1}{4e} \end{aligned}$$

となる。よって $a = \frac{1}{4e}$, $P \left(e^{\frac{1}{4}}, \frac{1}{4e^{\frac{5}{2}}} \right)$ となる。

(答) $a = \frac{1}{4e}$, $P \left(e^{\frac{1}{4}}, \frac{1}{4e^{\frac{5}{2}}} \right)$

(3)

求める面積は下図の斜線部の面積である。



よって求める面積は

$$\frac{1}{4e} \int_0^{e^{\frac{1}{4}}} x^2 dx - \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \frac{\log x}{x^2} dx$$

であるがここで

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x^2} dx &= -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4e} \int_0^{e^{\frac{1}{4}}} x^2 dx - \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \frac{\log x}{x^2} dx &= \frac{1}{12e} [x^3]_0^{e^{\frac{1}{4}}} + \left[\frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} \right]_1^{e^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{1}{4}} - 1 \\ &= \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{4}} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3} e^{-\frac{1}{4}} - 1$