

IV

(1)

(i)

$f(x)=2x^2-nx+4$ について方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解が α, β であるとき, 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{n}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta=2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①より

$$\beta=\frac{n-2\alpha}{2}$$

と表される。ここで $k=n-2\alpha$ とおくと, α が整数ならば, n が整数であるから k も整数となる。よって, α が整数ならば, β は整数 k を用いて $\frac{k}{2}$ と表されることが示された。

(証明終)

(ii)

α が整数であるとき, (i)の結果より β は整数 k を用いて $\frac{k}{2}$ と表される。よって, β が整数でないならば, k は奇数となる。また, ②より

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 2 \\ \Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{k}{2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \alpha k &= 4 \end{aligned}$$

となる。 α, k はともに整数であることより, 正負を含めた 4 の約数となる。 k が奇数であるから

$$k=\pm 1$$

であり, $\alpha=\frac{4}{k}$ となる。このとき

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \frac{4}{k} + \frac{k}{2} \\ &= \frac{8+k^2}{2k} \end{aligned}$$

となり, ①より

$$\frac{n}{2} = \frac{8+k^2}{2k} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $n>0$ であることと $8+k^2>0$ であることより, ③を満たすのは $k>0$ の場合であるから $k=1$ である。したがって, ③より

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} &= \frac{8+1^2}{2 \cdot 1} \\ \Leftrightarrow n &= 9 \end{aligned}$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

不等式 $f(x) \leq 0$ をみたす実数 x が存在することは, 方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつことと同値である。このとき, $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow n^2-32 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow n &\geq 4\sqrt{2} \quad (\because n>0) \end{aligned}$$

となり, さらに, n は整数であるから

$$n \geq 6$$

となる。このとき $f(1)$ の値は

$$\begin{aligned} f(1) &= 6-n \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となるから, $m=1$ とすれば, m は正の奇数でかつ $f(m) \leq 0$ を満たす。以上より, 不等式 $f(m) \leq 0$ を満たす正の奇数 m が存在することは示された。

(証明終)

V

(1)

(i)

$b > a > 0$ であるとき

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) > 0$$

となり、さらに

$$\frac{a+b}{2} > 0, \sqrt{ab} > 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &> (\sqrt{ab})^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} &> \sqrt{ab} \end{aligned}$$

となる。また、 $a < b$ より

$$\frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

となる。以上より

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b \quad \dots \textcircled{1}$$

であることが示された。

(証明終)

(ii)

①より

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &< \frac{a+b}{2} \\ \Leftrightarrow ab &< \frac{a+b}{2} \sqrt{ab} \quad (\because \sqrt{ab} > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} &< \sqrt{ab} \quad \left(\because \frac{a+b}{2} > 0\right) \end{aligned}$$

となる。また、①より

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< b \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{2b}{a+b} \quad \left(\because \frac{a+b}{2} > 0\right) \\ \Leftrightarrow a &< \frac{2ab}{a+b} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。以上より

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

(i)

$0 < a < b$ であるとき

$$\begin{aligned} a^2 &< ab < b^2 \\ \Leftrightarrow a &< \sqrt{ab} < b \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。②式に $a = \frac{1221}{116}$, $b = \frac{116}{11}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1221}{116} &< \sqrt{\frac{1221}{116} \cdot \frac{116}{11}} < \frac{116}{11} \\ \Leftrightarrow \frac{1221}{116} &< \sqrt{111} < \frac{116}{11} \end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)

(ii)

②式に $a = \frac{283272}{26887}$, $b = \frac{26887}{2552}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{283272}{26887} &< \sqrt{\frac{283272}{26887} \cdot \frac{26887}{2552}} < \frac{26887}{2552} \\ \Leftrightarrow \frac{283272}{26887} &< \sqrt{111} < \frac{26887}{2552} \end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)

VI

(1)

$$f(x) = x^2 \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 2x$$

であることから、放物線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + a^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2ax - a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様にして、放物線 $y = f(x)$ 上の点 $B(b, b^2)$ における接線 m の方程式は

$$y = 2bx - b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、 ℓ と m の交点 E の x 座標は

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2$$

$$\Leftrightarrow (a - b)\{2x - (a + b)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a + b}{2} \quad (\because a - b \neq 0)$$

となり、これと①より E の座標は $\left(\frac{a + b}{2}, ab\right)$ となる。

$$(\text{答}) \ E\left(\frac{a + b}{2}, ab\right)$$

(2)

ℓ と x 軸の交点 C の x 座標は、①より

$$0 = 2ax - a^2$$

$$\Leftrightarrow a\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \quad (\because a \neq 0)$$

となり、また、 m と x 軸の交点 D の x 座標は、②より

$$0 = 2bx - b^2$$

$$\Leftrightarrow b\left(x - \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b}{2} \quad (\because b \neq 0)$$

となる。よって、 $C\left(\frac{a}{2}, 0\right), D\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ である。 C, D, E を通る円の中心は線分 CD の垂直二等分

線 $x = \frac{a + b}{4}$ 上にあるから、この円の方程式は実数 p, q を用いて

$$\left(x - \frac{a + b}{4}\right)^2 + (y - p)^2 = q^2$$

と表される。2点 C, E はこの円周上に存在するから

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{a + b}{4}\right)^2 + p^2 = q^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\left(\frac{a + b}{2} - \frac{a + b}{4}\right)^2 + (ab - p)^2 = q^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立ち、③、④より

$$\left(\frac{a - b}{4}\right)^2 + p^2 = \left(\frac{a + b}{4}\right)^2 + (ab - p)^2$$

$$\Leftrightarrow 2abp = \frac{1}{4}ab + a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{4ab + 1}{8} \quad (\because ab \neq 0)$$

となる。これと③より

$$\left(\frac{a - b}{4}\right)^2 + \left(\frac{4ab + 1}{8}\right)^2 = q^2$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \frac{16a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1}{64}$$

であり、求める円の方程式は

$$\left(x - \frac{a + b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{4ab + 1}{8}\right)^2 = \frac{16a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1}{64}$$

となる。

$$(\text{答}) \ \left(x - \frac{a + b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{4ab + 1}{8}\right)^2 = \frac{16a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1}{64}$$

(3)

C, D, E を通る円と y 軸の共有点の y 座標は

$$\left(0 - \frac{a + b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{4ab + 1}{8}\right)^2 = \frac{16a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1}{64}$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{4ab + 1}{8}\right)^2 = \frac{16a^2b^2 - 8ab + 1}{64}$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{4ab + 1}{8} = \pm \frac{4ab - 1}{8}$$

$$\Leftrightarrow y = ab, \frac{1}{4}$$

となるから、この共有点の座標は $(0, ab), \left(0, \frac{1}{4}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \ (0, ab), \left(0, \frac{1}{4}\right)$$