

I

(1)

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ について,}$$

$$(\text{行列式}) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1 \neq 0$$

より逆行列が存在し,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを①の両辺に右からかけて,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)と同様にして,

$$A \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{pmatrix} \text{ について,}$$

$$(\text{行列式}) = 1 \cdot q - p \cdot 0 = q \neq 0$$

より逆行列が存在し,

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} q & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを②の両辺に右からかけて,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{q} \begin{pmatrix} q & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} q & -p+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} q & -p+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -p+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} q^2 & -pq+q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{q} \begin{pmatrix} q & -p+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

(証明終)

II

(1)

$k=2, -1$ のとき, l は l_1, l_2 のいずれかと交点を持たないので $k \neq 2, -1$ で考える。

l と l_1 の交点の x 座標は, $kx+1=2x$ より $x=\frac{1}{2-k}$, y 座標は $y=\frac{2}{2-k}$

l と l_2 の交点の x 座標は, $kx+1=-x$ より $x=-\frac{1}{1+k}$, y 座標は $y=\frac{1}{1+k}$

よって交点の y 座標がともに正となる条件は,

$$\frac{2}{2-k} > 0, \frac{1}{1+k} > 0$$

これを解いて, 求める範囲は

$$-1 < k < 2$$

(答) $-1 < k < 2$

(2)

(1)より交点の座標は分かっているので, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2-k} + \frac{1}{1+k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-k} + \frac{1}{1+k} \right) \end{aligned}$$

$$(答) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-k} + \frac{1}{1+k} \right)$$

(3)

$S = S(k)$ と表すと,

$$\begin{aligned} S'(k) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2-k)^2} - \frac{1}{(1+k)^2} \right\} \\ &= \frac{3(2k-1)}{2(2-k)^2(1+k)^2} \end{aligned}$$

よって次の増減表をえる。

k	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	2
$S'(k)$	$\times$	-	0	+	$\times$
$S(k)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$

よって $k = \frac{1}{2}$ のとき S は最小値

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

をとる。

(答) $k = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{2}{3}$

III

(1)

$X+Y$ が偶数となるのは、 X, Y がともに奇数またはともに偶数の場合である。

100 枚のカードの中に偶数・奇数の番号はともに 50 枚ずつあるので、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

$X+Y \leq 5$ となる (X, Y) の組み合わせは次の 10 通りである。

$$(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(2,1)(2,2)(2,3)(3,1)(3,2)(4,1)$$

(X, Y) の組み合わせは全部で $100^2 = 10000$ 通りなので、求める確率は

$$\frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$$

(答) $\frac{1}{1000}$

(3)

$2 \leq n \leq 100$ のときを考える。

$X+Y \leq n$ となる (X, Y) の組み合わせは次のようになる。

$$\begin{aligned} (X, Y) = & (1, 1), (1, 2), \dots, (1, n-1) \\ & (2, 1), \dots, (2, n-2) \\ & \vdots \\ & (n-1, 1) \end{aligned}$$

これらは全部で

$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ 通り}$$

よって、 $X+Y \leq n$ ($2 \leq n \leq 100$) となる確率は、 $\frac{n(n-1)}{20000}$

ここで、 $n=71$ のときの確率は $\frac{71 \cdot 70}{20000} = \frac{4970}{20000} < \frac{1}{4}$ となり、

$n=72$ のときの確率は $\frac{72 \cdot 71}{20000} = \frac{5112}{20000} > \frac{1}{4}$ となる。

$X+Y \leq n$ となる確率は n に関して明らかに単調増加であることに注意すると

$X+Y \leq n$ となる確率が $\frac{1}{4}$ となる自然数 n は存在しないことが分かる。

(証明終)

IV

以下、 a を 27 で割った余りが b であることを、 $a \equiv b$ と表すことにする。

(1)

$$4^7 = (3+1)^7 = \sum_{k=0}^7 {}_7C_k \cdot 3^k$$

であるから、

$$\begin{aligned} 4^7 &\equiv {}_7C_0 + {}_7C_1 \cdot 3 + {}_7C_2 \cdot 3^2 \\ &= 211 \\ &\equiv 22 \quad (\because 211 = 27 \times 7 + 22) \end{aligned}$$

ゆえに、 4^7 を 27 で割った余りは 22 である。

(答) 22

(2)

$$4^{31} = 4^3 \cdot (4^7)^4$$

であるから、

$$\begin{aligned} 4^{31} &\equiv 4^3 \cdot 22^4 \quad (\because (1)) \\ &= 22 \cdot 88^3 \\ &= 22 \cdot (27 \cdot 3 + 7)^3 \\ &\equiv 22 \cdot 7^3 \\ &= 22 \cdot (27 \cdot 12 + 19) \\ &\equiv 22 \cdot 19 \\ &= 418 \\ &\equiv 13 \end{aligned}$$

ゆえに、 4^{31} を 27 で割った余りは 13 である。

(答) 13

V

(1)

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, ... のように表すことにする。

$$\vec{p} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{q} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

であるから、PQ を 2:1 に外分する点を V とすると、

$$\vec{v} = \frac{-\vec{p} + 2\vec{q}}{2-1} = -\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{3}{2}\vec{c}$$

同様に、

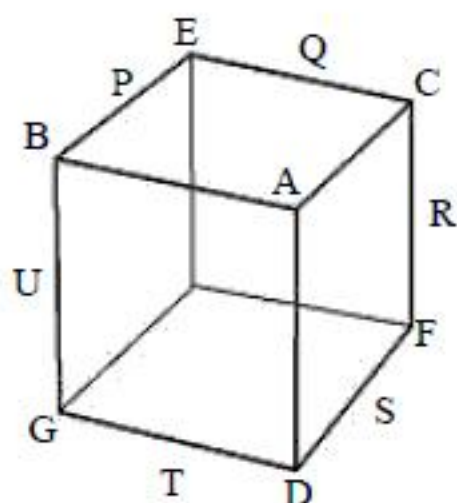
$$\vec{r} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}, \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}$$

であるから、RS を 1:2 に外分する点を W とすると、

$$\vec{w} = \frac{-2\vec{r} + \vec{s}}{1-2} = -\left\{-2\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right)\right\} = \frac{3}{2}\vec{c}$$

よって 2 点 V, W は一致する。

(証明終)



(2)

$$\vec{p} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{q} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{r} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}, \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}, \vec{u} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

これらは全て $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ の係数の和が $\frac{3}{2}$ で等しいので、P, Q, R, S, T, U は

$\overrightarrow{AX} = s\vec{b} + t\vec{c} + \left(\frac{3}{2} - s - t\right)\vec{d}$ で表される平面上にある。(X は平面上の点, s, t は実数)

(証明終)

VI

(1)

$3^x > 0, 3^{-x} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係より

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{2} \geq \frac{2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}}}{2} = 1 \quad (\text{等号成立は } 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = 0 \text{ のとき})$$

よって $f(x) \geq 1$ である。

(証明終)

(2)

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{2} = k$$

$$(3^x)^2 - 2k \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\therefore 3^x = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$$

よって、

$$x = \log_3(k \pm \sqrt{k^2 - 1})$$

$$(\text{答}) \quad x = \log_3(k \pm \sqrt{k^2 - 1})$$

(3)

$$\begin{aligned} 2\{f(a)\}^2 - 1 &= 2 \cdot \frac{3^{2a} + 2 + 3^{-2a}}{4} - 1 \\ &= \frac{9^a + 9^{-a}}{2} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{9^a + 9^{-a}}{2} \geq \sqrt{9^a \cdot 9^{-a}} = 1$$

が成り立つので、(2) の結果を利用して、

$$\begin{aligned} x &= \log_3 \left(\frac{9^a + 9^{-a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9^a + 9^{-a}}{2} \right)^2 - 1} \right) \\ &= \log_3 \left(\frac{9^a + 9^{-a}}{2} \pm \frac{9^a - 9^{-a}}{2} \right) \\ &= \log_3(9^{\pm a}) \\ &= \pm 2a \end{aligned}$$

このうち、正の解は

$$x = 2a$$

$$(\text{答}) \quad x = 2a$$