

I

(1)

E のグラフの方程式は

$$y-5=-(x-3)^2$$

$$\therefore y=-x^2+6x-4$$

である。ここで

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x^2+6x-4 \end{cases}$$

を解くと

$$\begin{cases} x=1, y=1 \\ x=2, y=4 \end{cases}$$

なので、 E と C の共有点の座標は、

$$(1, 1), (2, 4)$$

である。

(答) $(1, 1), (2, 4)$

(2)

F のグラフの方程式は

$$y-q=-(x-p)^2$$

$$\therefore y=-x^2+2px-p^2+q$$

である。ここで C と F のグラフの方程式を連立して、

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x^2+2px-p^2+q \end{cases}$$

より、

$$2x^2-2px+p^2-q=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が導かれる。 C と F の共有点がただ一つであるためには、 x に関する 2 次方程式①が重解をもてばよいので、①の判別式を D とすると、

$$D=4p^2-8(p^2-q)=0$$

$$\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}p^2$$

であればよい。これを①に代入すると

$$2x^2-2px+\frac{1}{2}p^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}p$$

となる。以上より共有点の座標は

$$\left(\frac{1}{2}p, \frac{1}{4}p^2\right)$$

(答) $\left(\frac{1}{2}p, \frac{1}{4}p^2\right)$

II

(1)

1 回の試行で白球を袋から取り出す確率は

$$\frac{m}{m+n}$$

である。よって白球が 2 回取り出される確率は

$$\left(\frac{m}{m+n}\right) \cdot \left(\frac{m}{m+n}\right) = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{m}{m+n}\right)^2$$

(2)

1 回の試行で黒球を袋から取り出す確率は

$$\frac{n}{m+n}$$

である。2 回の試行で異なる色の球が取り出されるのは、1 回目に黒球、2 回目に白球を取り出す場合と、1 回目に白球、2 回目に黒球を取り出す場合が考えられるので、求める確率は

$$\begin{aligned} P &= \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \\ &= \frac{2mn}{(m+n)^2} \end{aligned}$$

である

$$(\text{答}) \frac{2mn}{(m+n)^2}$$

(3)

示すべき命題は

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2mn}{(m+n)^2} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 4mn &\leq (m+n)^2 \\ \Leftrightarrow (m-n)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

と同値変形される。 $(m-n)^2 \geq 0$ は常に成り立つので、 $P \leq \frac{1}{2}$ が成立する。また、等号成立は

$m=n$ 、すなわち黒球の個数と白球の個数が等しいときである。

(証明終)

(4)

$$x = \frac{n}{m} \Leftrightarrow n = mx$$

とおく。このとき

$$P = \frac{2mn}{(m+n)^2} = \frac{2m^2x}{(m+mx)^2} = \frac{2x}{(1+x)^2}$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned} P &= \frac{24}{49} \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{(1+x)^2} &= \frac{24}{49} \\ \Leftrightarrow 12x^2 - 25x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{4}, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{n}{m} = \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{n}{m} = \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$$

III

(1)

C_1 と C_2 の式から y を消去すると,

$$2x \sin x \cos x = x \cos x$$

... ①

となる。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ より $\cos x \neq 0$ なので,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2x \sin x = x$$

$$\Leftrightarrow x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ または } \sin x = \frac{1}{2}$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で $\sin x = \frac{1}{2}$ となるのは $x = \frac{\pi}{6}$ のときなので、 C_1 と C_2 の

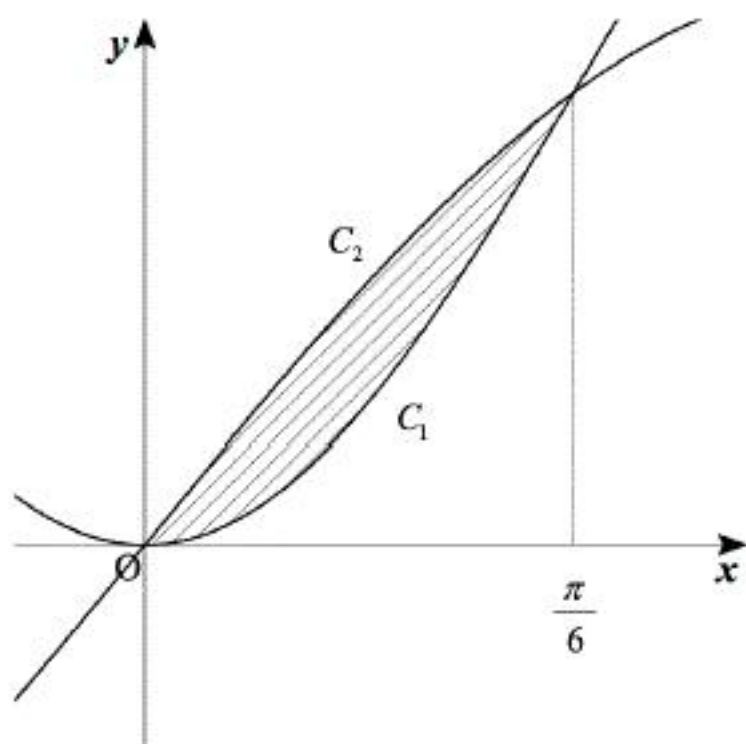
交点の x 座標は

$$x = 0, \frac{\pi}{6}$$

である。

(答) $x = 0, \frac{\pi}{6}$

(2)



(1)より $a = \frac{\pi}{6}$ なので、求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{6}} (x \cos x - 2x \sin x \cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x dx \\ &= \left\{ [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx \right\} - \left\{ -\left[\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (-\cos 2x) dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1$