

IV

(1)

与えられた条件より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{ON} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

である。点 X は直線 AN 上の点だから、 $\overrightarrow{OX}$ は実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{ON} \\ &= (1-k)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}k\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表せる。また、点 X は直線 BM 上の点でもあるから、 $\overrightarrow{OX}$ は実数 l を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= l\overrightarrow{OB} + (1-l)\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{3}(1-l)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} (1-k) = \frac{1}{3}(1-l) \\ \frac{3}{5}k = l \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと $(k, l) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$ となることから、 $\overrightarrow{OX}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OX} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

(2)

点 Y は直線 OX 上の点だから、 $\overrightarrow{OY}$ は実数 m を用いて、

$$\overrightarrow{OY} = m\overrightarrow{OX} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また点 Y は直線 AB 上の点だから、 $\overrightarrow{OY}$ は実数 n を用いて、

$$\overrightarrow{OY} = (1-n)\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ は一次独立であるから、①と②の係数を比較することで、

$$\begin{aligned} \frac{m}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{2}\overrightarrow{OB} &= (1-n)\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{6} = (1-n) \\ \frac{m}{2} = n \end{cases} \\ \Leftrightarrow (m, n) &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。よって $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ であるからから、求める比は

$$AY:YB=3:1$$

である。

$$(\text{答}) \quad AY:YB=3:1$$

(3)

(1)(2)の結果より、 $AY:YB=3:1$, $ON:NB=3:2$, $OM:MA=1:2$ である。よって、三角形 ABC の面積を S_{ABC} と表すことにすると、

$$\begin{aligned} T &= S_{MNY} \\ &= S_{OAB} - S_{AMY} - S_{OMN} - S_{BNY} \\ &= S - \frac{2}{3}S_{AOY} - \frac{3}{5}S_{OMB} - \frac{1}{4}S_{BNA} \\ &= S - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}S_{AOB} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}S_{OAB} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}S_{BOA} \\ &= S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{5}S - \frac{1}{10}S \\ &= \frac{1}{5}S \end{aligned}$$

となる。よって、求める比は $S:T=5:1$ である。

$$(\text{答}) \quad S:T=5:1$$

V

(1)

$f(x) = (x-k)^2 + k^2 - k - 1$ に対し $x=3$ を代入すると,

$$\begin{aligned} f(3) &= (3-k)^2 + k^2 - k - 1 \\ &= 2k^2 - 7k + 8 \\ &= 2\left(k - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

と平方完成できる。したがって、 k の値に関わらず $f(3) > 0$ となる。

(証明終)

(2)

2次方程式 $f(x) = 0$ が解をもつためには、 $y = f(x)$ のグラフが下に凸であることから、頂点の y 座標が 0 以下となればよい。条件より、頂点の y 座標は $k^2 - k - 1$ であるから、

$$\begin{aligned} k^2 - k - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} &\leq k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(3)

(2)の結果より、 $f(x) = 0$ が実数解をもつとき $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ より、2次関数 $y = f(x)$ の軸 $x = k$ は $x = 2$ より左側に存在する。さらに(1)の結果より $f(3) > 0$ であるから、 $n \geq 4$ に対しても $f(n) > 0$ が成り立つため、 $n = 1, 2$ の場合のみを調べれば十分である。したがって、 $f(1), f(2)$ の一方のみ 0 より小さくなるような k の値の範囲を調べると、

$$\begin{aligned} f(1) &< 0 \\ \Leftrightarrow 2k^2 - 3k &< 0 \\ \Leftrightarrow k(2k - 3) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < k &< \frac{3}{2} \\ \\ f(2) &< 0 \\ \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)(2k-3) &< 0 \\ \Leftrightarrow 1 < k &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

より、 $0 < k \leq 1$ である。

(答) $0 < k \leq 1$

VI

接点 P_1, P_2 の座標を $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ とおく。 P_1, P_2 における円 C の接線をそれぞれ求めると、

$$X_1x + Y_1y = 4$$

$$X_2x + Y_2y = 4$$

となり、これらの接線は点 $(a, 4)$ を通ることから、

$$aX_1 + 4Y_1 = 4$$

$$aX_2 + 4Y_2 = 4$$

となる。したがって、2 点 $P_1(X_1, Y_1), P_2(X_2, Y_2)$ はいずれも直線 $ax + 4y = 4$ 上に存在し、これが 2 点 P_1, P_2 を通る直線の方程式となることがわかる。ここで、 a の値にかかわらず方程式 $ax + 4y = 4$ が成り立つときについて、 (x, y) が満たすべき条件を求めると、

$$ax + 4y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (0, 1)$$

となる。したがって、2 点 P_1, P_2 を通る直線は a の値にかかわらず定点 $(0, 1)$ を通ることが示された。

(答) 定点の座標: $(0, 1)$