

I

(1)

$AB < BC < CA$ であるから、三角形 ABC の成立条件より

$$AB + BC > CA$$

$$\Leftrightarrow x + (x+1) > x+2$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

となる。

(答) $x > 1$

(2)

$\angle B = \theta$ とおくとき、余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} \\&= \frac{x^2 + (x+1)^2 - (x+2)^2}{2x(x+1)} \\&= \frac{x^2 - 2x - 3}{2x(x+1)} \\&= \frac{(x+1)(x-3)}{2x(x+1)} \\&= \frac{x-3}{2x}\end{aligned}$$

である。

(答) $\cos \theta = \frac{x-3}{2x}$

(3)

$AB < BC < CA$ であるから、三角形 ABC が鈍角三角形となるのは $\angle B$ が鈍角となるときであり、(2)の結果より

$$\cos \theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{2x} < 0$$

$$\Leftrightarrow x-3 < 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x < 3$$

となる。(1)の結果より $x > 1$ であるから、求める x の値の範囲は

$$1 < x < 3$$

である。

(答) $1 < x < 3$

II

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2(\sin \theta)x + \sin^2 \theta \\&= (x - \sin \theta)^2\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ のグラフの頂点の座標は $(\sin \theta, 0)$ である。

(答) $(\sin \theta, 0)$

(2)

[1] $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

このとき $\sin \theta \geq 0$ であるから、 $f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ のとき最大値をとる。よって、このときの最大値 $M(\theta)$ は

$$\begin{aligned}M(\theta) &= f\left(-\frac{1}{2}\right) \\&= \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

[2] $\pi < \theta \leq 2\pi$ のとき

このとき $\sin \theta \leq 0$ であるから、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値をとる。よって、このときの最大値 $M(\theta)$ は

$$\begin{aligned}M(\theta) &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\&= \sin^2 \theta - \sin \theta + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より

$$M(\theta) = \begin{cases} \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{4} & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ \sin^2 \theta - \sin \theta + \frac{1}{4} & (\pi < \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad M(\theta) = \begin{cases} \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{4} & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ \sin^2 \theta - \sin \theta + \frac{1}{4} & (\pi < \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

(3)

(2) の結果より

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} M(\theta) d\theta &= \int_0^{\pi} \left(\sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\sin^2 \theta - \sin \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta \\&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sin \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \sin \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta \\&= \left[\frac{3}{4}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta - \cos \theta \right]_0^{\pi} + \left[\frac{3}{4}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \cos \theta \right]_{\pi}^{2\pi} \\&= \frac{3}{2}\pi + 4\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \int_0^{2\pi} M(\theta) d\theta = \frac{3}{2}\pi + 4$$

III

(1)

x が $x = 0.abababab\cdots$ という循環小数であるとき

$$\begin{aligned}99x &= 100x - x \\&= ab.abababab\cdots - 0.abababab\cdots \\&= a \cdot 10 + b\end{aligned}$$

となり、 a, b は 0 以上 9 以下の異なる整数であるから $a, b \geq 0$ かつ $(a, b) \neq (0, 0)$ より、 $99x$ は自然数であることが示された。

(証明終)

(2)

$33x$ が自然数となるのは、 $99x$ が 3 の倍数となるときであり、(1)の結果より、 $a \cdot 10 + b$ が 3 の倍数となるときである。よって、 $a + b$ が 3 の倍数となるときである。このような条件を満たす a, b の組の例として、 $(a, b) = (1, 2)$ が挙げられ、このときの x の値は(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned}99x &= 12 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4}{33}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{4}{33}$$

(3)

$11x$ が自然数となるのは、 $99x$ が 9 の倍数となるときであり、(1)の結果より、 $a \cdot 10 + b$ が 9 の倍数となるときである。よって、 $a + b$ が 9 の倍数となる。ここで、 a, b は 0 以上 9 以下の異なる整数であるから

$$1 \leq a + b \leq 17$$

となり、以上の条件を満たす $a + b$ の値は

$$a + b = 9$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a + b = 9$$

IV

(1)

三角形 ABC の面積を S とおくと、 $AB = BC = 1$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。一方、三角形 ABC の内接円の半径を r とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (AB + BC + CA) r \\ &= \frac{3}{2} r \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} &= \frac{3}{2} r \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(2)

図形の対称性より三角形 DEF は正三角形である。ここで、三角形 ADF について余弦定理より

$$\begin{aligned} DF^2 &= AD^2 + AF^2 - 2AD \cdot AF \cos \angle DAF \\ &= x^2 + (1-x)^2 - 2x(1-x) \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 3x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

となり

$$3x^2 - 3x + 1 = 3 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

であるから

$$\begin{aligned} DF &= \sqrt{3x^2 - 3x + 1} (> 0) \\ \frac{DF}{\sin \angle DEF} &= 2R \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2 - 3x + 1}}{\sin \frac{\pi}{3}} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $R = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{3}}$

(3)

$R > 0$ であることから、 R^2 が最小となるとき R も最小となる。

$$R^2 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12}$$

であるから、 $0 < x < 1$ において R が最小となるのは

$$x = \frac{1}{2}$$

のときである。

(答) $x = \frac{1}{2}$

V

(1)

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &= (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4bc \\ &= (a-d)^2 + 4bc \end{aligned}$$

となり、さいころの目である a, b, c, d は正の値をとるから、つねに $D > 0$ は成り立つ。よって、どのようなさいころの目が出たとしても 2 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつことが示された。

(証明終)

(2)

2 次方程式 $f(x)=0$ の実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = a + d$$

が成り立ち、さいころの目である a, d は正の値をとるから $\alpha + \beta > 0$ となり、 α, β の少なくとも一方は正の値となる。よって、どのようなさいころの目が出たとしても 2 次方程式 $f(x)=0$ は少なくとも 1 つの正の実数解をもつことが示された。

(証明終)

(3)

2 次方程式 $f(x)=0$ の実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくとき、解と係数の関係より

$$\alpha\beta = ad - bc$$

が成り立つ。(2)の結果より、2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの実数解がいずれも 0 以上であることと、 $\alpha\beta \geq 0$ つまり $ad - bc \geq 0$ であることは同値であり、このようになる確率を p とおく。ここで、さいころを投げたときすべての目の出方は同様に確からしいとすると

$$ad - bc > 0 \text{ となる確率を } p_1$$

$$ad - bc = 0 \text{ となる確率を } p_2$$

$$ad - bc < 0 \text{ となる確率を } p_3$$

とおいたとき

$$p_1 = p_3$$

が成り立ち

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

であるから

$$2p_1 + p_2 = 1$$

となる。また

$$ad - bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ad - bc > 0 \text{ または } ad - bc = 0$$

であり、 $ad - bc > 0$ となる事象と $ad - bc = 0$ となる事象は互いに排反であるから

$$p = p_1 + p_2$$

である。以上より

$$p = p_1 + p_2$$

$$\geq \frac{1}{2}(2p_1 + p_2) (\because p_2 \geq 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

となることが示された。

(証明終)

VI

(1)

[1] $x < 1$ のとき

このとき $x-1 < 0$ かつ $x-2 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} |x-1|+|x-2| &= -(x-1)-(x-2) \\ &= -2x+3 \end{aligned}$$

となる。

[2] $1 \leq x < 2$ のとき

このとき $x-1 \geq 0$ かつ $x-2 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} |x-1|+|x-2| &= (x-1)-(x-2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

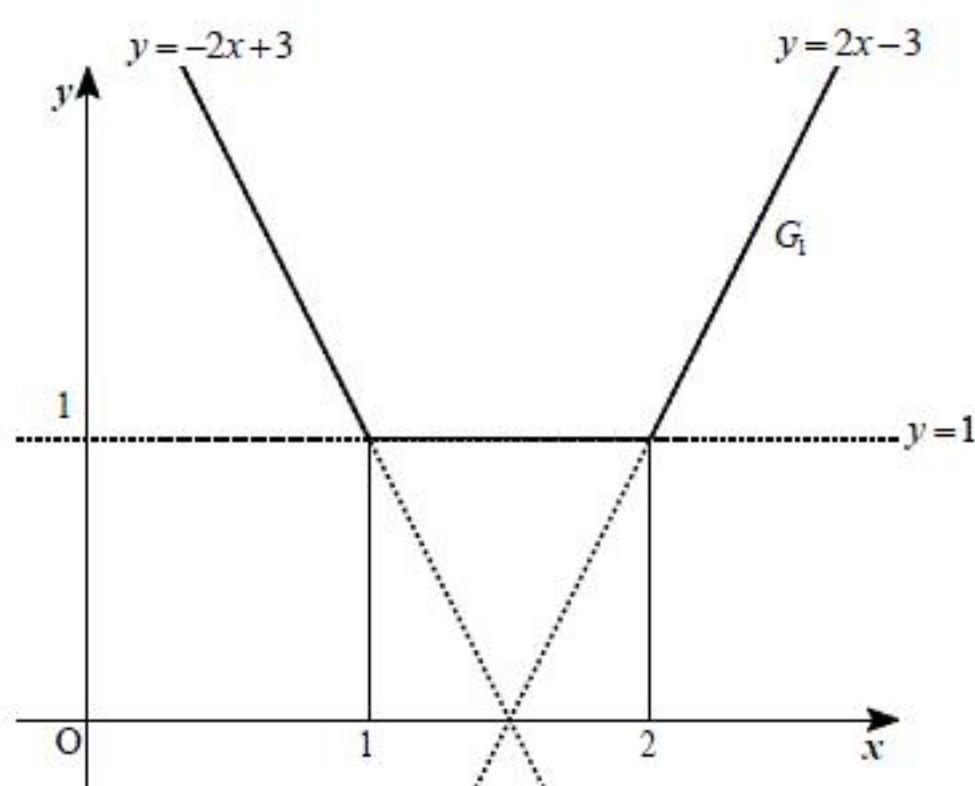
[2] $2 \leq x$ のとき

このとき $x-1 \geq 0$ かつ $x-2 \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} |x-1|+|x-2| &= (x-1)+(x-2) \\ &= 2x-3 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2], [3] より, $G_1: y = |x-1|+|x-2|$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

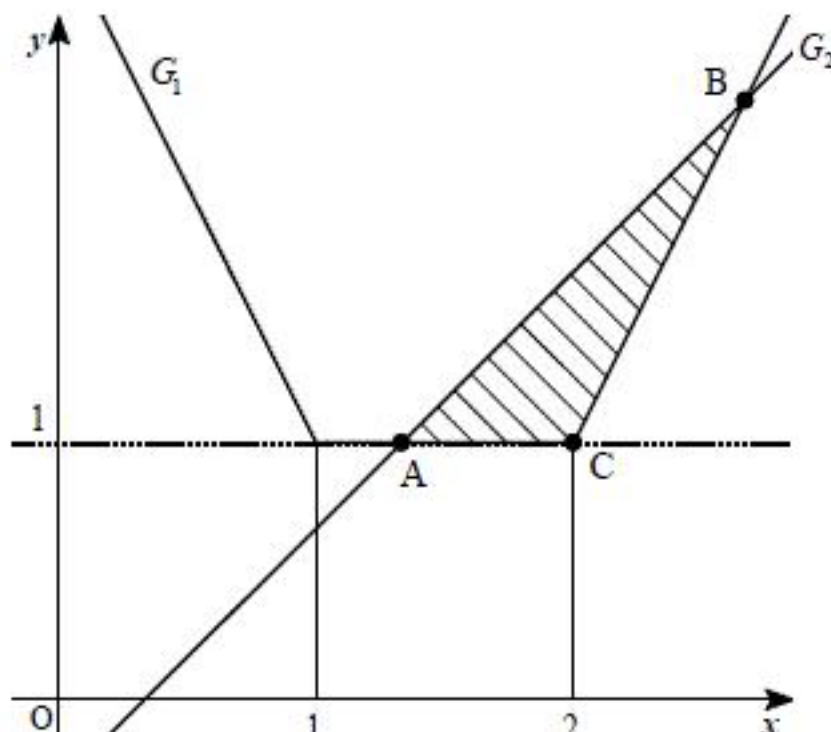
直線 $G_2: y = x+a$ の傾きは1であるから, G_1 と G_2 の囲む領域が三角形となるのは, G_2 と直線 $y=1$ の交点を A としたとき, 点 A が $1 \leq x < 2$ の範囲に存在するときである。A の x 座標は

$$\begin{aligned} 1 &= x+a \\ \Leftrightarrow x &= 1-a \end{aligned}$$

であるから, 求める a の値の範囲は

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1-a < 2 \\ \Leftrightarrow -1 &< a \leq 0 \end{aligned}$$

となる。このときの G_1 と G_2 の囲む領域は下図の斜線部のようになる。



このとき G_2 と直線 $y=2x-3$ の交点を B とすると, 点 B の座標は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x+a \\ y = 2x-3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (a+3, 2a+3) \end{aligned}$$

となる。C(2, 1) とおくと, 求める面積 S_1 は三角形 ABC の面積であり

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \{2-(1-a)\} \{(2a+3)-1\} \\ &= (a+1)^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-1 < a \leq 0, S_1 = (a+1)^2$

(3)

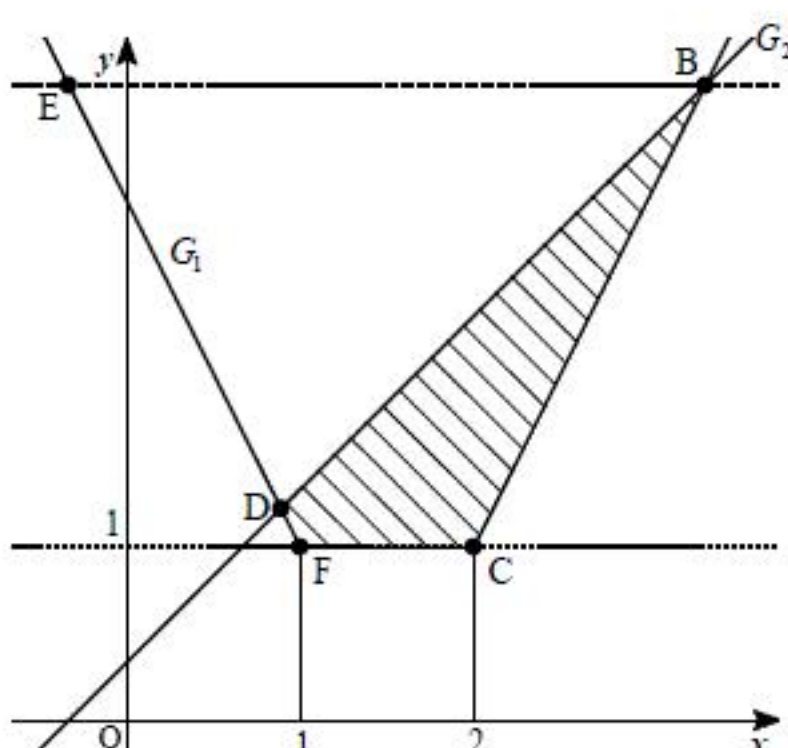
直線 $G_2: y = x+a$ の傾きは1であるから, G_1 と G_2 の囲む領域が四角形となるのは, G_2 と直線 $y=1$ の交点 A が $x < 1$ の範囲に存在するときである。A の x 座標は

$$x = 1-a$$

であるから, 求める a の値の範囲は

$$\begin{aligned} 1-a &< 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< a \end{aligned}$$

となる。このときの G_1 と G_2 の囲む領域は下図の斜線部のようになる。



このとき G_2 と直線 $y=2x-3$ の交点 B の座標は $(a+3, 2a+3)$ であり, G_2 と直線 $y=-2x+3$ の交点を D とすると, 点 D の座標は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x+a \\ y = -2x+3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{a}{3}+1, \frac{2}{3}a+1\right) \end{aligned}$$

となる。また, 直線 $y=-2x+3$ 上で点 B と y 座標が等しい点を E とすると, E の座標は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -2x+3 \\ y = 2a+3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (-a, 2a+3) \end{aligned}$$

となる。さらに, C(2, 1), F(1, 1) とおくと, 求める面積 S_2 は

$$S_2 = \text{台形 BCFE} - \text{三角形 BDE}$$

となるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \left[\left\{ (a+3) - (-a) \right\} + (2-1) \right] \left\{ (2a+3) - 1 \right\} - \frac{1}{2} \left\{ (a+3) - (-a) \right\} \left\{ (2a+3) - \left(\frac{2}{3}a+1 \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3}a^2 + 2a + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a > 0, S_2 = \frac{2}{3}a^2 + 2a + 1$