I

(1)

x についての 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の判別式を D とおくと，この方程式が異なる実数解の個数が 2 個であるとき

$$D>0$$
$$\Leftrightarrow a^2-4b>0$$

となる。

(答) $a^2-4b>0$

(2)

x についての 4 次方程式

$$x^4+ax^2+b=0 \quad \cdots ①$$

において，$X=x^2$ とおくと

$$X^2+aX+b=0 \quad \cdots ②$$

とかける。X の値に対する，$X=x^2$ を満たす実数 x の値の個数は

$X<0$ のとき 0 個

$X=0$ のとき 1 個

$X>0$ のとき 2 個

である。方程式②の実数解 X の個数は高々2 個であるから，方程式①の異なる実数解の個数が 4 個であるとき，方程式②は異なる正の実数解を 2 個もつ。$f(X)=X^2+aX+b$ とおくと，方程式②の実数解 X は，XY 平面上における関数 $Y=f(X)$ のグラフと X 軸の交点の X 座標に対応するから，求める条件は，関数 $Y=f(X)$ のグラフと X 軸が $X>0$ の範囲に異なる 2 つの交点をもつ条件である。

$$f(X)=X^2+aX+b$$
$$=\left(X+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-4b}{4}$$

より，求める条件は

$$-\frac{a}{2}>0 \text{ かつ } -\frac{a^2-4b}{4}<0 \text{ かつ } f(0)>0$$
$$\Leftrightarrow a<0 \text{ かつ } a^2-4b>0 \text{ かつ } b>0$$

となる。

(答) $a<0$ かつ $a^2-4b>0$ かつ $b>0$

(3)

(2)の考察より，方程式①の異なる実数解の個数が 2 個であるとき，方程式②について

[1] 正の実数解を 1 個，負の実数解を 1 個もつ場合

[2] 正の重解を 1 個もつ場合

という 2 つの場合がある。

[1] 正の実数解を 1 個，負の実数解を 1 個もつ場合

求める条件は，関数 $Y=f(X)$ のグラフと X 軸が $X>0$ の範囲に 1 つ，$X<0$ の範囲に 1 つの交点をもつ条件であり

$$f(0)<0$$
$$\Leftrightarrow b<0$$

となる。

[2] 正の重解を 1 個もつ場合

求める条件は，関数 $Y=f(X)$ のグラフが $X>0$ の範囲で X 軸と接する条件であり

$$-\frac{a}{2}>0 \text{ かつ } -\frac{a^2-4b}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow a<0 \text{ かつ } a^2-4b=0$$

となる。

以上，[1], [2]より，求める条件は

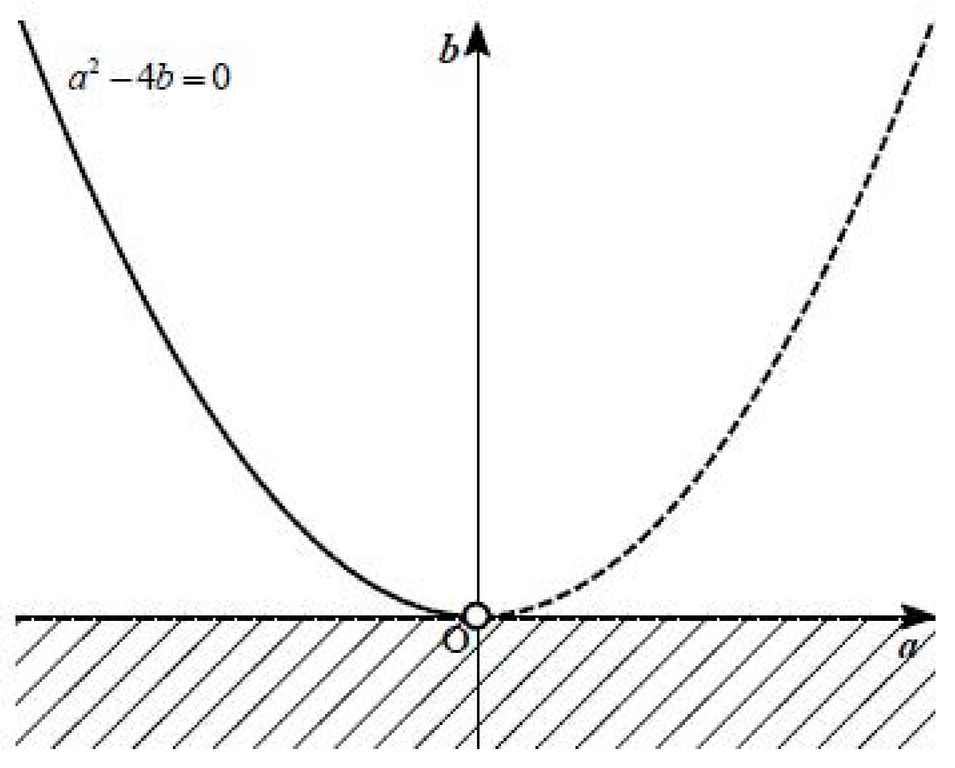
「$b<0$」または「$a<0$ かつ $a^2-4b=0$」

となる。

(答) 「$b<0$」または「$a<0$ かつ $a^2-4b=0$」

(4)

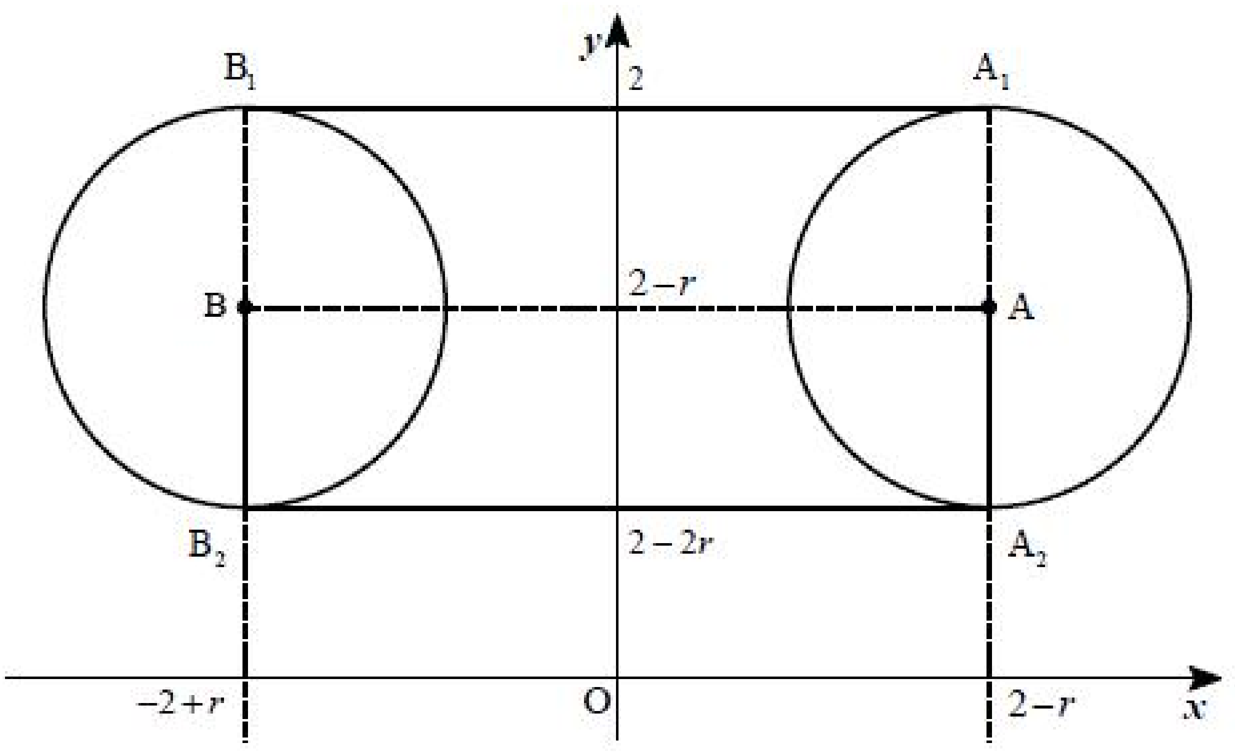
a, b が(3)の条件を満たすとき，点 (a, b) の存在する領域は ab 平面上において下図のようになる。ただし，関数 $a^2-4b=0$ のグラフは実線部のみ含み，a 軸上の点は含まない。



(答) 前図

Ⅱ

(1)



$A(2-r, 2-r)$, $B(-2+r, 2-r)$ に対して点 A_1, A_2, B_1, B_2 を上図のようにおく。このとき，A の x 座標から B の x 座標を引いた値は $0<r<2$ のとき

$$(2-r)-(-2+r)=4-2r>0$$

であるから，点 P が線分 AB 上を A から B まで動くとき，円 O の周および内部が通過して出来る図形は，A を中心とする半径 r の円と B を中心とする半径 r の円と四角形 $A_1B_1B_2A_2$ を合わせた部分である。よって，この図形の面積は，半径 r の円と 2 辺の長さが $2r$, $4-2r$ である長方形の面積の和となるから

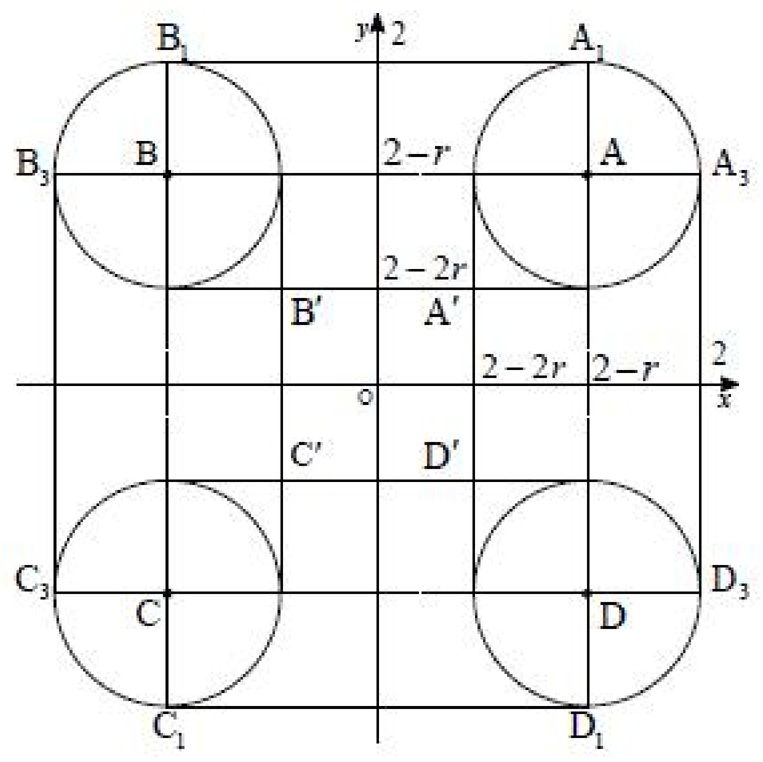
$$\pi r^2+2r\cdot(4-2r)=(\pi-4)r^2+8r$$

である。

(答) $(\pi-4)r^2+8r$

(2)

[1] $0<r\leqq 1$ のとき

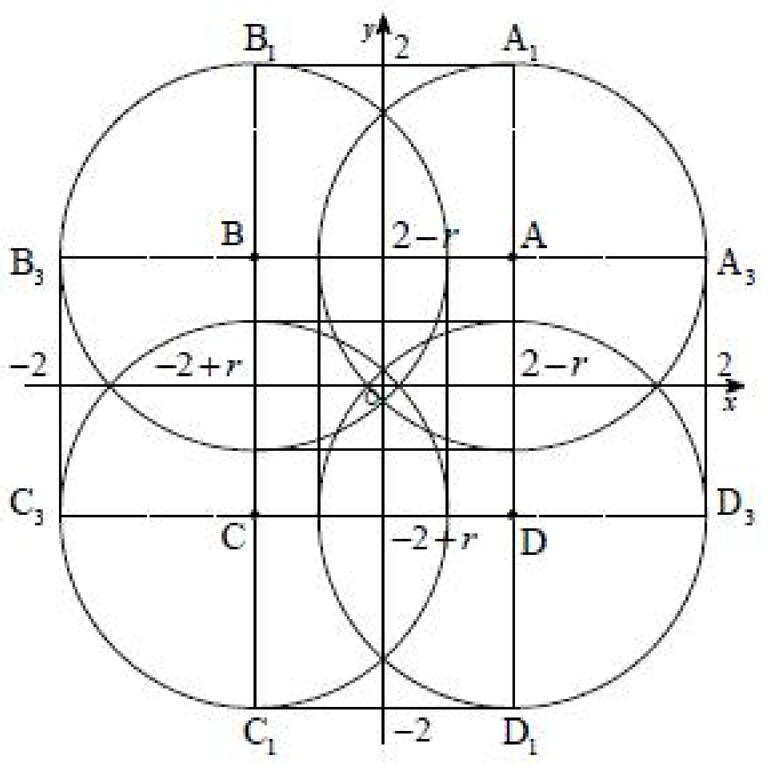


A, B, C, D に対して点 $A_1, A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, A', B', C', D'$ を上図のようにおく。求める図形の面積は $A_1, B_1, B_3, C_3, C_1, D_1, D_3, A_3$ で囲まれた部分から四角形 $A'B'C'D'$ を除いた部分の面積であるから対称性を利用して

$$4\left\{2\cdot2-\left(r^2-\frac{1}{4}\pi r^2\right)-(2-2r)(2-2r)\right\}=(\pi-20)r^2+32r$$

となる。

[2] $1<r<2$ のとき



A, B, C, D に対して点 $A_1, A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3$ を上図のようにおく。求める図形の面積は $A_1, B_1, B_3, C_3, C_1, D_1, D_3, A_3$ で囲まれた部分の面積であるから対称性を利用して

$$4\left\{2\cdot2-\left(r^2-\frac{1}{4}\pi r^2\right)\right\}=(\pi-4)r^2+16$$

となる。

(答) $(\pi-20)r^2+32r \quad (0<r\leqq 1)$
$(\pi-4)r^2+16 \quad (1<r<2)$

(3)

[1] $0<r\leqq 1$ のとき

(2)の結果を用いて

$$S=(\pi-20)r^2+32r$$
$$=-(20-\pi)\left(r-\frac{16}{20-\pi}\right)^2+\frac{16^2}{20-\pi}$$

であり，$20-\pi>0$ であるから，S は $r=\dfrac{16}{20-\pi}$ のとき最大値 $\dfrac{16^2}{20-\pi}$ をとる。また，$r=1$ のとき $S=12+\pi$ であるから，$\dfrac{16^2}{20-\pi}>12+\pi$ となる。

[2] $1<r<2$ のとき

(2)の結果を用いて

$$S=-(4-\pi)r^2+16$$

であるから

$$S<-(4-\pi)\cdot1^2+16$$
$$=12+\pi$$

となり，S を最大にするような r は存在しない。

以上，[1], [2]より，$r=\dfrac{16}{20-\pi}$ のとき S は最大となる。

(答) $r=\dfrac{16}{20-\pi}$

Ⅲ

(1)

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ で定義される関数 $f(x)=4\sin x+2\cos 2x+1$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cos x-4\sin 2x \\ &= 4\cos x-8\sin x\cos x \\ &= 4\cos x(1-2\sin x) \end{aligned}$$

であるから，$f(x)$ の増減表は以下の通りになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	0	−	0	+	+
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	

よって，$f(x)$ の極大値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4,\ f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=4$$

であり，極小値は

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3,\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-5$$

である。

（答）極大値 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4,\ f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=4$，極小値 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3,\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-5$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)dx &= \int_0^{2\pi}(4\sin x+2\cos 2x+1)dx \\ &= \left[-4\cos x+\sin 2x+x\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

である。

（答）$\int_0^{2\pi} f(x)dx=2\pi$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin x+2\cos 2x+1 \\ &= 4\sin x+2\left(1-2\sin^2 x\right)+1 \\ &= -4\sin^2 x+4\sin x+3 \\ &= -(2\sin x+1)(2\sin x-3) \end{aligned}$$

であり，$2\sin x-3<0$ であるから

$\sin x \geqq -\frac{1}{2}$，つまり，$0 \leqq x \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき $f(x) \geqq 0$

$\sin x < -\frac{1}{2}$，つまり，$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$ のとき $f(x)<0$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}|f(x)|dx &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} f(x)dx+\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\{-f(x)\}dx+\int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} f(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)dx-2\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} f(x)dx \\ &= 2\pi-2\left[-4\cos x+\sin 2x+x\right]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \\ &= \frac{2}{3}\pi+10\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

（答）$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx=\frac{2}{3}\pi+10\sqrt{3}$

Ⅳ

(1)

点Mは辺BCの中点であるから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}&=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

(2)

点Pは辺OAを$x:(1-x)$に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}$$

であり，また，点Qについて(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ}&=y\overrightarrow{CM}\\&=y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{OP}\\&=\overrightarrow{OC}+y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)-x\overrightarrow{OA}\\&=-x\overrightarrow{OA}+\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}+(1-y)\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

である。$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{CM}$が垂直であるとき

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=0\\&\Leftrightarrow\left\{-x\overrightarrow{OA}+\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}+(1-y)\overrightarrow{OC}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=0\\&\Leftrightarrow-\frac{x}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{y}{4}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1-y}{2}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-(1-y)\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=0\\&=-\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}-\frac{y}{4}+\frac{1-y}{4}-(1-y)\\&=\frac{x}{4}+\frac{3}{4}y-\frac{3}{4}\\&=0\end{aligned}$$

となる。ここで，

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=0\\&\Leftrightarrow-\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}-\frac{y}{4}+\frac{1-y}{4}-(1-y)=0\\&\Leftrightarrow\frac{x}{4}+\frac{3}{4}y-\frac{3}{4}=0\\&\Leftrightarrow y=-\frac{x}{3}+1\end{aligned}$$

となる。

(答) $y=-\frac{x}{3}+1$

(3)

$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{CM}$が垂直であるとき，(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=-x\overrightarrow{OA}+\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}+(1-y)\overrightarrow{OC}\\&=-x\overrightarrow{OA}+\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}+\frac{x}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{CM}\right|^2&=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2&=\left|-x\overrightarrow{OA}+\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}+\frac{x}{3}\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=x^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\frac{x^2}{9}\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\\&\quad-2x\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{2x}{3}\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\frac{2x^2}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\frac{11}{12}x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{CM}$が垂直であるとき，三角形CMPの面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CM}\right|\left|\overrightarrow{PQ}\right|$$

となり，$S>0$であるから，Sが最小となるときS^2も最小となる。さらに，$\left|\overrightarrow{CM}\right|$は定数であるから，$S^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{CM}\right|^2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2$が最小となるとき$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2$も最小となる。よって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2&=\frac{11}{12}x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\\&=\frac{11}{12}\left(x-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{2}{11}\end{aligned}$$

となるから，xが$0<x<1$の範囲を動くとき，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2$は$x=\frac{3}{11}$で最小値$\frac{2}{11}$をとる。よって，三角形CMPの面積$S$の最小値は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{2}{11}}\\&=\frac{\sqrt{66}}{44}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{66}}{44}$

V

(1)

三角形BCDは三角形ABCと相似であるから$CD = CB$である二等辺三角形となる。これより三角形BCDの内角について

$$\begin{aligned}\pi &= \angle BCD + \angle CDB + \angle DBC \\ &= \angle BCD + 2\angle CDB\end{aligned}$$

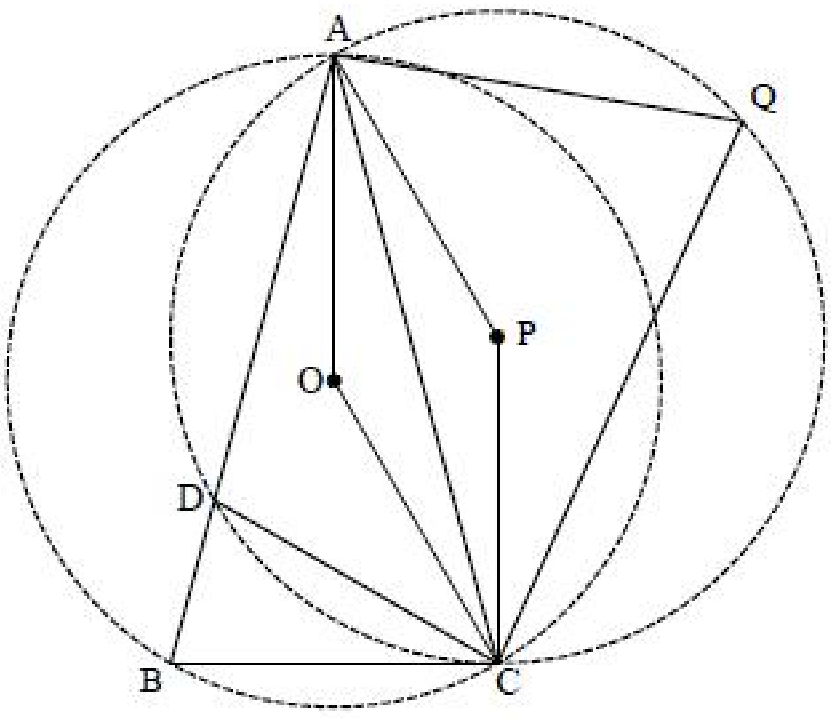
が成り立ち，さらに

$$\begin{aligned}&\angle BCD > 0 \\ \Leftrightarrow\ &\pi - 2\angle CDB > 0 \\ \Leftrightarrow\ &\angle CDB < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となるから，$\angle CDB$の補角である$\angle ADC$は鈍角となり，三角形ADCは鈍角三角形となる。よって，三角形ADCの外心である点Pはこの三角形の外部にあることが示された。

(証明終)

(2)



三角形ABCは鋭角三角形であるから，点Oは三角形ABCの内部に存在する。点Oは三角形ABCの外心であるから，同一の円弧に関する円周角と中心角の関係より

$$\angle AOC = 2\angle ABC \qquad \cdots ①$$

となる。一方，三角形ADCの外接円の優弧AC上に点Qをとると，同一の円弧に関する円周角と中心角の関係より

$$\angle APC = 2\angle AQC$$

となり，四角形ADCQは円に内接するから

$$\angle AQC = \pi - \angle ADC$$

を満たす。$\angle ADC$は$\angle BDC$の補角であるから

$$\angle ADC = \pi - \angle BDC$$

であり

$$\angle BDC = \angle DBC\,(= \angle ABC)$$

であるから

$$\begin{aligned}\angle APC &= 2\angle AQC \\ &= 2(\pi - \angle ADC) \\ &= 2\pi - 2(\pi - \angle BDC) \\ &= 2\angle ABC \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

となる。①，②より

$$\angle AOC = \angle APC$$

であることが示された。

(証明終)

(3)

三角形CDBの外心をRとおく。

三角形ABC ∽ 三角形CBD

であるから

三角形AOC ∽ 三角形CRD

となる。相似な図形の対応する角の大きさは等しいから

$$\angle AOC = \angle CRD \qquad \cdots ③$$

である。よって，①，③より

$$\angle CRD = 2\angle ABC \qquad \cdots ④$$

となる。また，三角形ABCの内角の和より

$$\begin{aligned}\angle CAD &= \pi - \angle ABC - \angle ACB \\ &= \pi - 2\angle ABC \qquad \cdots ⑤\end{aligned}$$

となるから，④，⑤より

$$\angle CRD + \angle CAD = \pi$$

である。よって，四角形ADRCは対角の和がπとなり円に内接し，三角形CDBの外心Rは△ADCの外接円の周上にあることが示された。

(証明終)

VI

さいころを投げたときの各目の出方は同様に確からしいとする。

(1)

さいころの出た目と裏返されるカードの組み合わせは以下の表のようになる。

出た目	裏返すカード
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6

1回目の操作の後で，番号2のカードの赤面が上になるのは，さいころの2, 4, 6が出たときであるから，求める確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

3回の操作におけるさいころの目の出方は全部で6^3通りある。(1)の表より，どの目が出た場合も番号1のカードは裏返されるから，3回目の操作の後に番号1のカードは赤色の面が上になっている。よって，3回目の操作の後で，赤色の面が上になっているカードが2枚であるとき，番号1以外に赤色の面が上になっているカードの番号をmとして，mの値で場合分けする。

[1] $m=6$の場合

3回の操作のうち，1回は6の目が出る必要があり，さらに，このとき裏返る2と3のカードをもう1回ずつ裏返す必要があるから，残りの2回の操作で出る目は2と3となる。よって，3回の操作の目の出方は，2, 3, 6の目の出る順番を考慮して6通りある。

[2] $m=4$の場合

3回の操作のうち，1回は4の目が出る必要があり，さらに，このとき裏返る2のカードをもう1回裏返す必要があるから，残りの2回の操作のうち1回は2の目が出る必要がある。残りの1回の操作において番号1以外のカードを裏返してはならないから，残りの1回の操作で出る目は1となる。よって，3回の操作の目の出方は，1, 2, 4の目の出る順番を考慮して6通りある。

[3] $m=2, 3, 5$の場合

3回の操作のうち，1回はmの目が出る必要がある。残りの2回の操作は同じ数字の目が出ればよい。

[i] 残りの2回の操作でmの目が出る場合

3回の操作で出る目が全て等しいから，3回の操作の目の出方は，出る目の順序を考慮して，それぞれのmの値に対して1通りある。

[ii] 残りの2回の操作でm以外の目が出る場合

残りの2回の操作で出る目の選び方は5通りあるから，3回の操作の目の出方は，出る目の順序を考慮して，それぞれのmの値に対して5×3通りある。

以上, [1], [2], [3]より，該当する目の出方は

$$6+6+1\times3+5\times3\times3=60\text{通り}$$

であるから，求める確率は

$$\frac{60}{6^3}=\frac{5}{18}$$

である。

(答) $\frac{5}{18}$

3)

番号4, 5, 6のカードが裏返されるためにはその数字と等しい数の目が出る必要がある。これらの目が1回ずつ出たとき，

番号1のカードは3回

番号2のカードは2回

番号3, 4, 5, 6のカードは1回

裏返される。よって，番号2のカードをさらにもう1回裏返す必要があるから, 2の目が出る必要がある。その結果

番号1のカードは4回

番号2のカードは3回

番号3, 4, 5, 6のカードは1回

裏返される。よって，さらに番号1のカードをもう1回裏返せば，すべてのカードの赤色の面が上になるから, 1の目が出る必要がある。以上より，最小回数の操作ですべてのカードの赤色の面が上になるのは, 1, 2, 4, 5, 6の目が出るときであるから，求める操作回数の最小値は5となる。

(答) 5