

I

(1)

$4(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{CB}$ より、これを整理して

$$\begin{aligned} 4\left\{\overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC})\right\} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow 8\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\ \therefore \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{8}(\vec{b} + 3\vec{c}) \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}(\vec{b} + 3\vec{c})$$

(2)

(1)の結果を用いると、 $\overrightarrow{MP}$ について

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{8}(\vec{b} + 3\vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= -\frac{3}{8}(\vec{b} - \vec{c}) \end{aligned}$$

が得られる。同様に、 $\overrightarrow{NP}$ について

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{8}(\vec{b} + 3\vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= \frac{1}{8}(\vec{b} - \vec{c}) \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{MP} = -\frac{3}{8}(\vec{b} - \vec{c}), \quad \overrightarrow{NP} = \frac{1}{8}(\vec{b} - \vec{c})$$

(3)

(2)より、

$$\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{NP}$$

である。 $\vec{b}, \vec{c}$ は1次独立であるから $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NP}$ が $\vec{0}$ でないことに注意すると

$$\begin{aligned} MP:NP &= |\overrightarrow{MP}|:|\overrightarrow{NP}| \\ &= |-3\overrightarrow{NP}|:|\overrightarrow{NP}| \\ &= 3|\overrightarrow{NP}|:|\overrightarrow{NP}| \\ &= 3:1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad MP:NP = 3:1$$

(4)

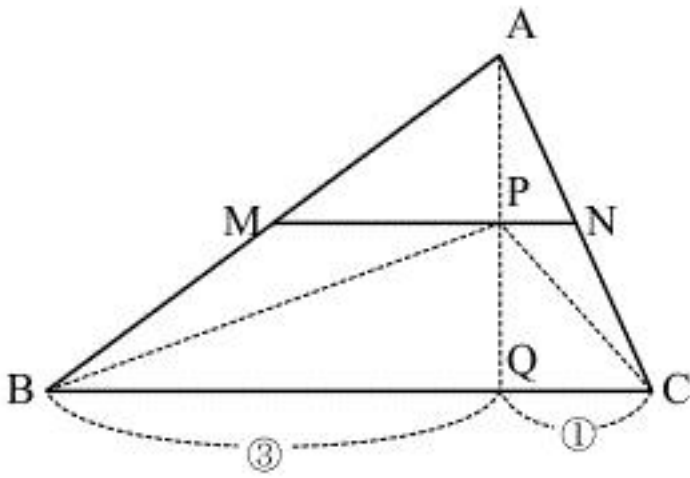
下図のように AP と BC の交点を Q とおくと、適当な実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= t\overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{8}t\vec{b} + \frac{3}{8}t\vec{c} \end{aligned}$$

と表せるが、 Q は BC 上にあるので

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}t + \frac{3}{8}t &= 1 \\ \therefore t &= 2 \end{aligned}$$

でなければならない。このとき $AQ = 2AP$ より $AP = PQ$ であり、 $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$ であることより $BQ:QC = 3:1$ である。



よってそれぞれの面積について

$$\begin{aligned} S &= \triangle PAB \\ &= \triangle BPQ \\ &= \frac{3}{4} \triangle PBC \\ &= \frac{3}{4} T \\ U &= \triangle PCA \\ &= \triangle CPQ \\ &= \frac{1}{4} \triangle PBC \\ &= \frac{1}{4} T \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって $S:T = 3:4, T:U = 4:1$ である。

$$(\text{答}) \quad S:T = 3:4, \quad T:U = 4:1$$

II

(1)

$n=1$ のとき、取り出されるカードの数字は必ず1であり、袋に入れられた赤球、白球の個数も共に1つずつなので、 $p_1 = \frac{1}{2}$ である。 $n=2$ のとき、1または2のカードがそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で取り出される。

[1] 1のカードが取り出されたとき

袋に入れられた赤球の個数は1つ、白球の個数は2つなので、白球が取り出される確率は $\frac{2}{3}$ である。

[2] 2のカードが取り出されたとき

袋に入れられた赤球、白球の個数は共に2つずつなので、白球が取り出される確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ である。

以上[1], [2]より

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{7}{12}$$

(2)

数字 k ($1 \leq k \leq n$) のカードが取り出されたとき、袋に入れられた赤球の個数は k 個、白球の個数は n 個なので、白球が取り出される確率は $\frac{n}{n+k}$ である。全てのカードが $\frac{1}{n}$ ずつの確率で取り出されるので、

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

である。よって、区分求積法を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log|1+x| \right]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \log 2$$

III

(1)

$-a \leq x \leq 0$ では

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x+a)(x-b) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

だから、 S_1 を求めると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-a}^0 f(x) dx \\ &= \int_{-a}^0 x(x+a)(x-b) dx \\ &= \int_{-a}^0 \{x^3 + (a-b)x^2 - abx\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a-b}{3}x^3 - \frac{ab}{2}x^2 \right]_{-a}^0 \\ &= -\left\{ \frac{1}{4}(-a)^4 + \frac{a-b}{3}(-a)^3 - \frac{ab}{2}(-a)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{12}a^3(a+2b) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{1}{12}a^3(a+2b)$$

(2)

$0 \leq x \leq b$ では $f(x) \leq 0$ だから、 S_2 を求めると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^b \{-f(x)\} dx \\ &= -\int_0^b x(x+a)(x-b) dx \\ &= -\int_0^b \{x^3 + (a-b)x^2 - abx\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a-b}{3}x^3 - \frac{ab}{2}x^2 \right]_0^b \\ &= -\left\{ \frac{1}{4}b^4 + \frac{a-b}{3}b^3 - \frac{ab}{2}b^2 \right\} \\ &= \frac{1}{12}b^3(2a+b) \end{aligned}$$

である。よって $S_1 = S_2$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}a^3(a+2b) &= \frac{1}{12}b^3(2a+b) \\ \Leftrightarrow a^4 + 2a^3b &= 2ab^3 + b^4 \\ \Leftrightarrow a^4 - b^4 + 2a^3b - 2ab^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - b^2) \{ (a^2 + b^2) + 2ab \} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+b)^3 (a-b) &= 0 \end{aligned}$$

が導かれるが、 $a, b > 0$ であることより $a+b > 0$ であるから、

$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$

が示される。

(証明終)

(3)

$S_1 = S_2$ のとき、 $f(x)$ は奇関数であることを示す。(2)より $S_1 = S_2$ ならば $a=b$ であるから、このとき $f(x) = x(x+a)(x-a)$ である。いま、

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x(-x+a)(-x-a) \\ &= -x(x-a)(x+a) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は奇関数である。

(証明終)

$f(x)$ が奇関数であるとき、 $S_1 = S_2$ であることを示す。 $f(-a)=0$ より、 $f(x)$ が奇関数ならば $f(a)=0$ であるため、

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a \cdot 2a \cdot (a-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= b \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。このとき、 $f(x)$ が奇関数であることより

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_{-a}^0 f(x) dx - \left\{ \int_0^b (-f(x)) dx \right\} \\ &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx \\ &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_{-a}^a f(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $S_1 = S_2$ が示される。

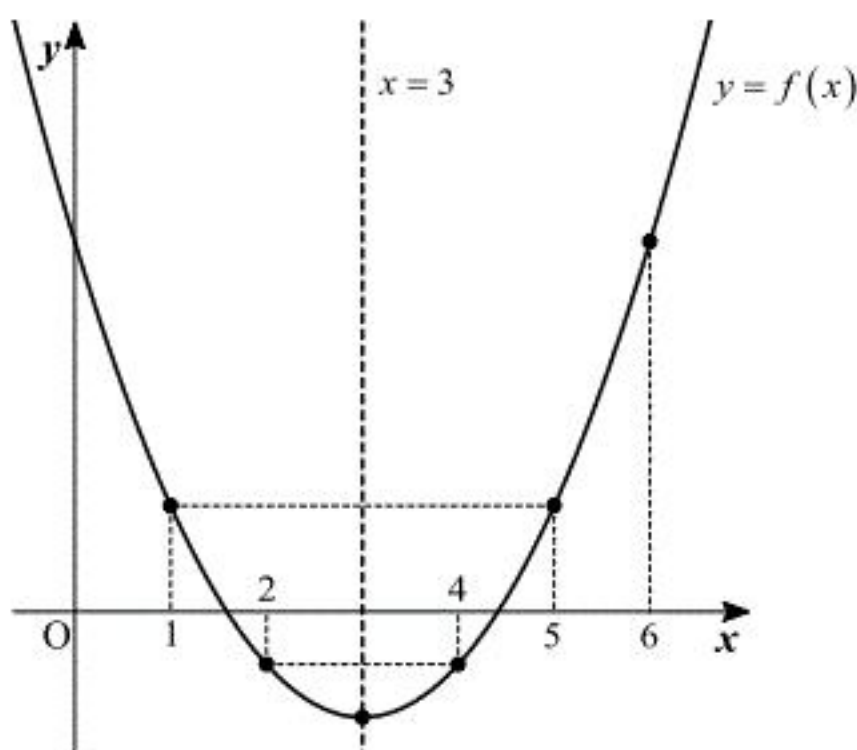
(証明終)

IV

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + a \\ &= (x-3)^2 + a - 9 \end{aligned}$$

より、 $y = f(x)$ のグラフは $x = 3$ を軸とする下に凸な放物線である。



上図より

$$f(3) < f(2) = f(4) < f(1) = f(5) < f(6) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。題意を満たすのは1以上6以下の整数 k のうち、 $f(k) \leq 0$ であるものが丁度3つ存在するときであり、 $\textcircled{1}$ より $f(4) \leq 0, f(1) > 0$ であることが必要十分条件である。よって

$$\begin{cases} a - 8 \leq 0 \\ a - 5 > 0 \end{cases} \quad \therefore 5 < a \leq 8$$

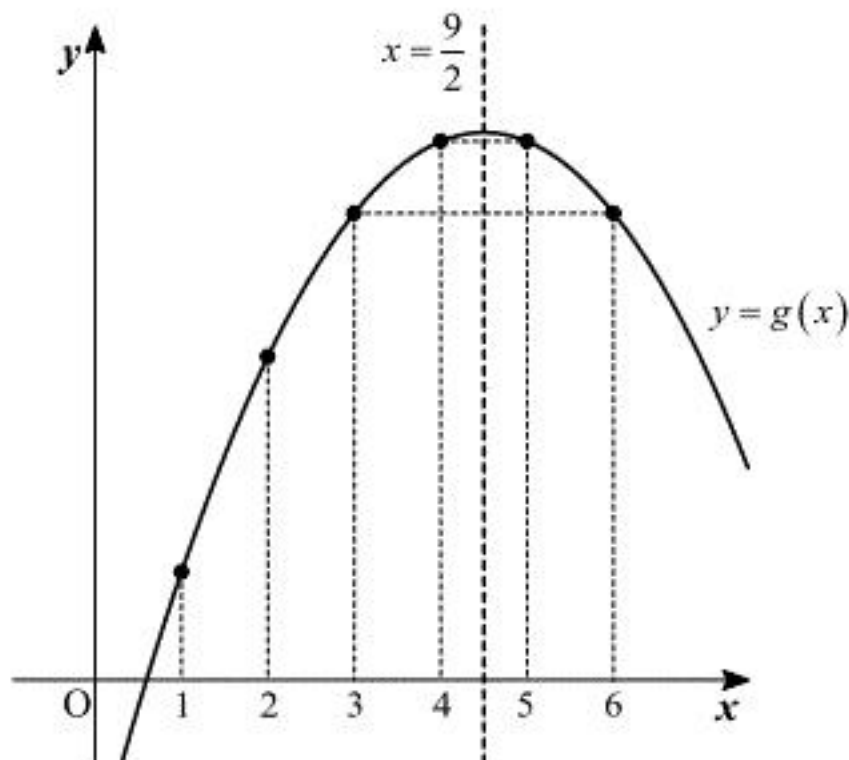
が求める条件である。

(答) $5 < a \leq 8$

(2)

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 9x + b \\ &= -\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + b + \frac{81}{4} \end{aligned}$$

より、 $y = g(x)$ のグラフは $x = \frac{9}{2}$ を軸とする上に凸な放物線である。



上図より

$$g(1) < g(2) < g(3) = g(6) < g(4) = g(5) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。いま、題意を満たすには1以上6以下の整数 k のうち、 $f(k) \leq 0$ であるものが3つ以上存在しなければならない。よって $\textcircled{1}$ をもとに、以下のように場合分けする。

[1] $f(2), f(4) \leq 0, f(1) > 0$ のとき

(1)より a の条件は $5 < a \leq 8$ である。このとき、 $f(k) \leq 0$ を満たす整数 k は $k = 2, 3, 4$ に限るため、これら3つの k がいずれも $g(k) \geq 0$ を満たせばよい。 $\textcircled{2}$ より $g(2) \geq 0$ であればよいので、

$$\begin{aligned} g(2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 14 + b &\geq 0 \\ \therefore b &\geq -14 \end{aligned}$$

が b の条件である。

[2] $f(1), f(5) \leq 0, f(6) > 0$ のとき

a の条件は、

$$\begin{cases} a - 5 \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \therefore 0 < a \leq 5$$

である。このとき、 $f(k) \leq 0$ を満たす整数 k は $k = 1, 2, 3, 4, 5$ に限るから、これらの k のうち丁度3つが $g(k) \geq 0$ を満たせばよい。 $\textcircled{2}$ より $g(3) \geq 0, g(2) < 0$ であればよいので、

$$\begin{cases} 18 + b \geq 0 \\ 14 + b < 0 \end{cases} \quad \therefore -18 \leq b < -14$$

が b の条件である。

[3] $f(6) \leq 0$ のとき

$f(k) \leq 0 (k = 1, 2, \dots, 6)$ であるから、 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のうち丁度3つが $g(k) \geq 0$ を満たせばよいが、 $\textcircled{2}$ よりこのような場合は存在しない。

以上[1], [2], [3]より、 a, b のとり得る値の範囲は「 $5 < a \leq 8$ かつ $b \geq -14$ 」または「 $0 < a \leq 5$ かつ $-18 \leq b < -14$ 」である。

(答) 「 $5 < a \leq 8$ かつ $b \geq -14$ 」または「 $0 < a \leq 5$ かつ $-18 \leq b < -14$ 」

V

(1)

円 C_1 と円 C_2 は半径がともに 1 であるから、これらが異なる 2 点で交わるための必要十分条件は、

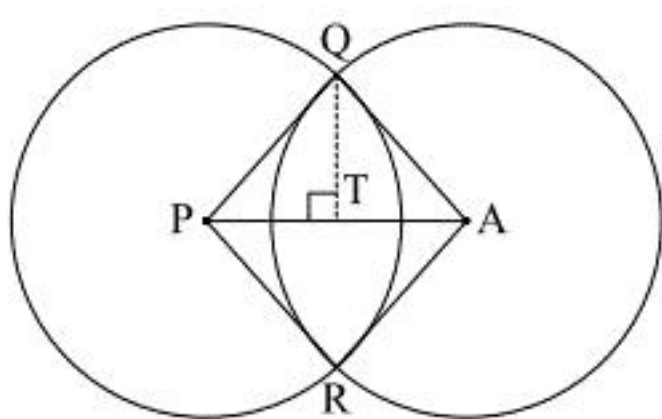
$$\begin{aligned} 0 < PA < 2 \\ \Leftrightarrow 0 < (\cos \theta - 2)^2 + \sin^2 \theta < 4 \\ \Leftrightarrow 0 < (\cos \theta - 2)^2 + (1 - \cos^2 \theta) < 4 \\ \Leftrightarrow 0 < -4 \cos \theta + 5 < 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \cos \theta < \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であることと合わせて、 $\frac{1}{4} < \cos \theta \leq 1$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} < \cos \theta \leq 1$$

(2)(i)

下図のように、円 C_1 と円 C_2 の交点を Q, R とおき、線分 PA の中点を T とおく。



ここで、 $A(2, 0)$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ より

$$\begin{aligned} PA &= \sqrt{(\cos \theta - 2)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{(\cos \theta - 2)^2 + (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{-4 \cos \theta + 5} \end{aligned}$$

であり、 $\triangle QPA$ が $QP = QA$ の 2 等辺三角形であることより、

$$\begin{aligned} QT &= \sqrt{QP^2 - PT^2} \\ &= \sqrt{QP^2 - \left(\frac{1}{2} PA\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}(-4 \cos \theta + 5)} \\ &= \frac{\sqrt{4 \cos \theta - 1}}{2} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \triangle PQT &= \frac{1}{2} PT \cdot QT \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{-4 \cos \theta + 5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cos \theta - 1}}{2} \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{(-4 \cos \theta + 5)(4 \cos \theta - 1)} \end{aligned}$$

である。対称性より、

$$\begin{aligned} S &= 2 \triangle PQT \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(-4 \cos \theta + 5)(4 \cos \theta - 1)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-16 \cos^2 \theta + 24 \cos \theta - 5} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{-16 \cos^2 \theta + 24 \cos \theta - 5}$$

(ii)

(i)より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{-16 \cos^2 \theta + 24 \cos \theta - 5} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-16 \left(\cos \theta - \frac{3}{4}\right)^2 + 4} \end{aligned}$$

であるから、 $\frac{1}{4} < \cos \theta \leq 1$ の範囲で考えたとき、 S は $\cos \theta = \frac{3}{4}$ で最大値をとり、その値は

$$\frac{1}{4} \sqrt{4} = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{1}{2}$$

VI

(1)

題意より、 $f(x)=0$ の解を $x=\alpha, \beta$ ($\alpha \neq 0$)、 $g(x)=0$ の解を $x=\frac{1}{\alpha}, \gamma$ とおくことが出来る。こ

のとき、

$$f(\alpha) = \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha} + a = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times \alpha$ を計算すると

$$(\alpha^2 + a\alpha + b) - \left(\frac{1}{\alpha} + b + a\alpha\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = 1$$

となるから、 α が実数であることより $\alpha=1$ である。このとき、 $f(x)=0, g(x)=0$ について、
2次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases} 1 + \beta = -a \\ 1 \cdot \beta = b \\ 1 + \gamma = -b \\ 1 \cdot \gamma = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -a - 1 \\ \gamma = a \\ b = -a - 1 \end{cases}$$

が導ける。

(答) $f(x)=0$ の解: $x=1, -a-1$, $g(x)=0$ の解: $x=1, a$

(2)

(1)より $b=-a-1$ であるから、直線 $y=x-1$ と放物線 $y=f(x)$ の交点の x 座標について

$$x^2 + ax + (-a-1) = x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a-1)x - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1, -a$$

が得られる。同様に直線 $y=x-1$ と放物線 $y=g(x)$ の交点の x 座標について

$$x^2 + (-a-1)x + a = x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+2)x - a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1, a+1$$

が得られる。放物線 $y=f(x), y=g(x)$ はどちらも下に凸であるから、

$$S_1 = \int_{-a}^1 \left\{ (x-1) - (x^2 + ax - a - 1) \right\} dx$$

$$= - \int_{-a}^1 (x+a)(x-1) dx$$

$$= \frac{1}{6} \{ 1 - (-a) \}^3$$

$$= \frac{1}{6} (a+1)^3$$

$$S_2 = \int_1^{1+a} \left\{ (x-1) - (x^2 - ax - x - a) \right\} dx$$

$$= - \int_1^{1+a} (x-1)(x-a-1) dx$$

$$= \frac{1}{6} \{ (a+1) - 1 \}^3$$

$$= \frac{1}{6} a^3$$

である。よって $S_1:S_2=27:8$ を満たすとき、

$$\frac{1}{6} (a+1)^3 : \frac{1}{6} a^3 = 27:8$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^3 : a^3 = 27:8$$

$$\Leftrightarrow (a+1):a=3:2 \quad (\because a \text{は実数})$$

$$\Leftrightarrow 3a = 2(a+1)$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

となる。

(答) $a=2$