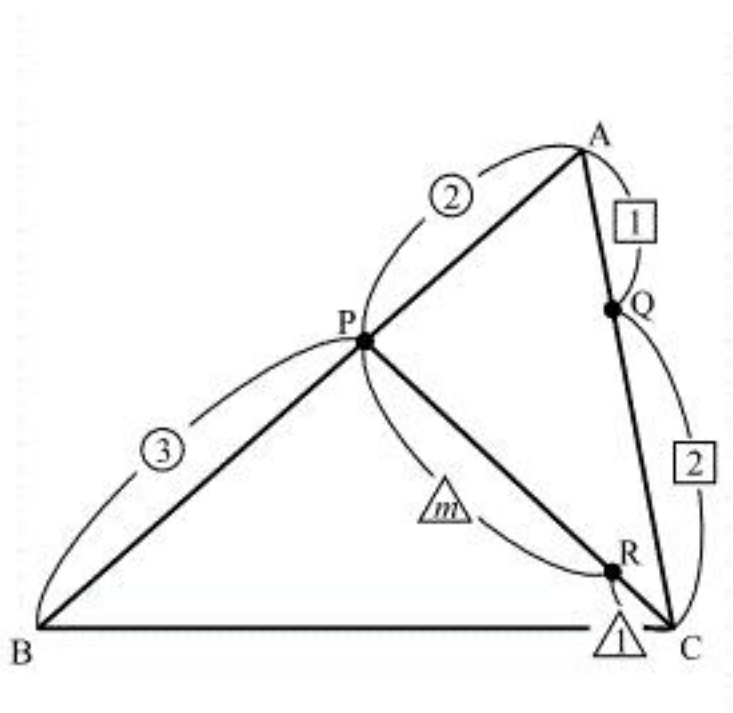


I（理学部）

(1)

三角形 ABC を図示すると以下のようになる。



AP:PB=2:3 より、AP は AB の長さの $\frac{2}{5}$ であるから、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5} \vec{b}$$

である。AQ:QC=1:2 より、AQ は AC の長さの $\frac{1}{3}$ であるから、

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \vec{c}$$

である。

$$(答) \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5} \vec{b}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \vec{c}$$

(2)

PR:RC=m:1 より $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$ を用いて $\overrightarrow{AR}$ を表すと、

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{m+1} \overrightarrow{AP} + \frac{m}{m+1} \overrightarrow{AC}$$

が得られる。(1)の結果を代入すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{2}{5} \vec{b} + \frac{m}{m+1} \vec{c} \\ &= \frac{2}{5(m+1)} \vec{b} + \frac{m}{m+1} \vec{c} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{QR}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AQ} \\ &= \left\{ \frac{2}{5(m+1)} \vec{b} + \frac{m}{m+1} \vec{c} \right\} - \frac{1}{3} \vec{c} \\ &= \frac{2}{5(m+1)} \vec{b} + \frac{2m-1}{3(m+1)} \vec{c} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \overrightarrow{QR} = \frac{2}{5(m+1)} \vec{b} + \frac{2m-1}{3(m+1)} \vec{c}$$

(3)

内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60^\circ \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\overrightarrow{QR}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直より内積が 0 であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{2}{5(m+1)} \vec{b} + \frac{2m-1}{3(m+1)} \vec{c} \right\} (\vec{c} - \vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5(m+1)} \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{2m-1}{3(m+1)} |\vec{c}|^2 - \frac{2}{5(m+1)} |\vec{b}|^2 - \frac{2m-1}{3(m+1)} \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 6\vec{b} \cdot \vec{c} + (10m-5) |\vec{c}|^2 - 6 |\vec{b}|^2 - (10m-5) \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 18 + 40m - 20 - 54 - 30m + 15 &= 0 \\ \therefore m &= \frac{41}{10} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(答) m = \frac{41}{10}$$

Ⅱ（理学部）

(1)

三角形 ABC の重心の座標について、 x 座標は $\frac{t-1+1}{3} = \frac{t}{3}$ 、 y 座標は $\frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$ であるから、

$D\left(\frac{t}{3}, \frac{1}{3}\right)$ である。また、外心は各辺の垂直二等分線の交点であるから、点 E は辺 BC の垂直二等分線である y 軸上に存在する。したがって、 s を実数として、 $E(0, s)$ とおける。ここで外心の性質より $AE = BE$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{(t-0)^2 + (1-s)^2} &= \sqrt{(-1-0)^2 + (0-s)^2} \\ \Leftrightarrow t^2 + (1-s)^2 &= 1 + s^2 \\ \therefore s &= \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $E\left(0, \frac{t^2}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) D\left(\frac{t}{3}, \frac{1}{3}\right), E\left(0, \frac{t^2}{2}\right)$$

(2)

DE の長さの 2 乗が $f(t)$ であるから

$$\begin{aligned}f(t) &= \left(\frac{t}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{t^2}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{9}t^2 + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

が得られる。これを t について微分すると

$$\begin{aligned}f'(t) &= t^3 - \frac{4}{9}t \\ &= t\left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t + \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $f'(t) = 0$ を満たす t は $t = 0, \pm \frac{2}{3}$ である。 $f'(t)$ を t について微分すると

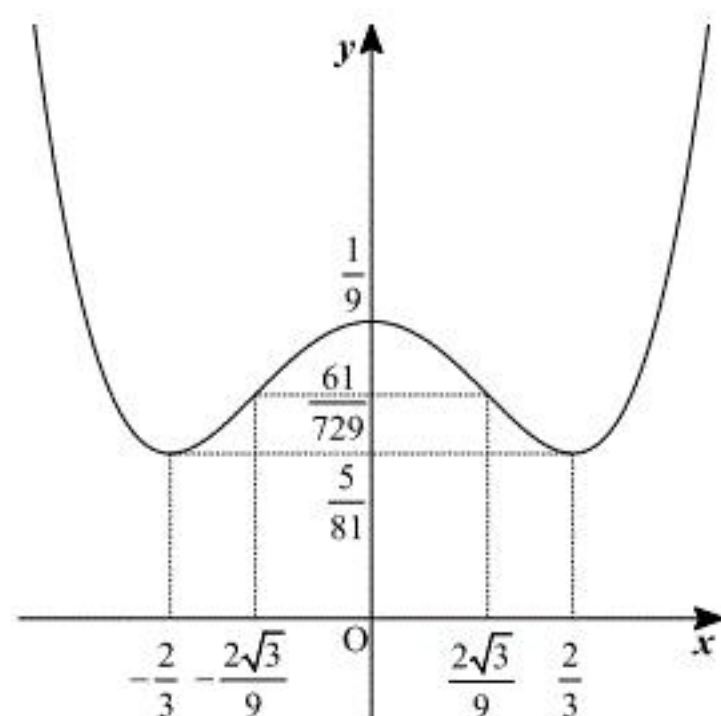
$$\begin{aligned}f''(t) &= 3t^2 - \frac{4}{9} \\ &= 3\left(t - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\left(t + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $f''(t) = 0$ を満たす t は $t = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$ である。したがって、増減表は以下のようになる。

t	...	$-\frac{2}{3}$	...	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	...	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	...	$\frac{2}{3}$	...
$f'(t)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f''(t)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{5}{81}$	$\nearrow$	$\frac{61}{729}$	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	$\frac{61}{729}$	$\searrow$	$\frac{5}{81}$	$\nearrow$

したがって、極大値は $\frac{1}{9}$ ($x = 0$) であり、極小値は $\frac{5}{81}$ ($x = \pm \frac{2}{3}$) であり、変曲点は

$\left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{61}{729}\right)$ であり、グラフは以下のようになる。



(答) 極大値は $\frac{1}{9}$ ($x = 0$)、極小値は $\frac{5}{81}$ ($x = \pm \frac{2}{3}$)、変曲点は $\left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{61}{729}\right)$ 、グラフは前図

Ⅲ (理学部)

(1)

6枚のカードから2枚を選ぶ選び方は ${}_6C_2$ 通りであり、同様に確からしく起こる。 X が3の倍数になるとき、少なくとも1枚3の倍数のカードを引けばよい。3の倍数でないカードは

$$6 - \frac{6}{3} = 4 \text{ (枚)}$$

あるから、余事象の確率を考えると、

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \\ &= 1 - \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

が得られる。 X が6の倍数となるのは、「6のカードを引く」もしくは「2または4のカードと3のカードを1枚ずつ引く」のいずれかである。したがって、求める確率は

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{5}{{}_6C_2} + \frac{2 \cdot 1}{{}_6C_2} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad P_1 = \frac{3}{5}, Q_1 = \frac{7}{15}$$

(2)

$6n$ 枚のカードから2枚を選ぶ選び方は ${}_{6n}C_2$ 通りであり、同様に確からしく起こる。 X が3の倍数になるとき、少なくとも1枚3の倍数のカードを引けばよい。3の倍数でないカードは

$$6n - \frac{6n}{3} = 4n \text{ (枚)}$$

あるから、余事象の確率を考えると、

$$\begin{aligned} P_n &= 1 - \frac{{}_{4n}C_2}{{}_{6n}C_2} \\ &= 1 - \frac{4n(4n-1)}{6n(6n-1)} \\ &= \frac{10n-1}{18n-3} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad P_n = \frac{10n-1}{18n-3}$$

(3)

X が6の倍数となるのは、「6の倍数のカードを引く」もしくは「6の倍数でない偶数のカードと6の倍数でない3の倍数のカードを1枚ずつ引く」のいずれかである。ここで、「6の倍数のカードを引く」確率は、「2枚とも6の倍数でないカードを引く」事象の余事象で求められ、6の倍数のカードは $\frac{6n}{6} = n$ 枚、6の倍数でない偶数のカードは $\frac{6n}{2} - n = 2n$ 枚、6の

倍数でない3の倍数のカードは $\frac{6n}{3} - n = n$ 枚であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} Q_n &= \left(1 - \frac{{}_{5n}C_2}{{}_{6n}C_2} \right) + \frac{{}_{2n}C_1 \cdot {}_nC_1}{{}_{6n}C_2} \\ &= 1 - \frac{5n(5n-1)}{6n(6n-1)} + \frac{n \cdot 2n}{\frac{6n(6n-1)}{2 \cdot 1}} \\ &= \frac{15n-1}{36n-6} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad Q_n = \frac{15n-1}{36n-6}$$

(4)

(2)および(3)の結果から、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n-1}{18n-3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{1}{n}}{18 - \frac{3}{n}} \\ &= \frac{5}{9} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n-1}{36n-6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 - \frac{1}{n}}{36 - \frac{6}{n}} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

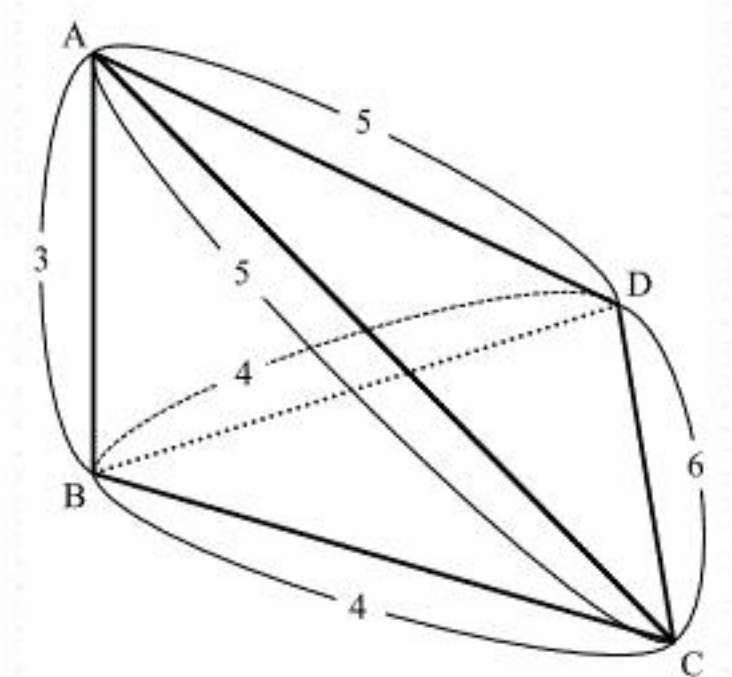
が得られる。

$$\text{(答)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{5}{9}, \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \frac{5}{12}$$

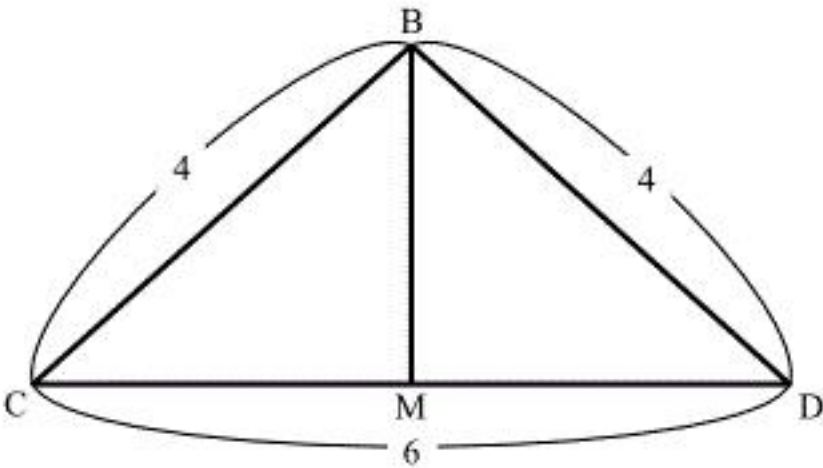
IV（生活環境学部）

(1)

四面体 ABCD を図示すると以下のようになる。



三角形 BCD を取り出すと以下のようになる。点 M は辺 CD の中点である。



三角形 BCD は二等辺三角形であるから、 $\angle CMB$ は直角である。したがって、三角形 BCM に関する三平方の定理より、

$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{4^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

となるから、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

となる。

(答) $3\sqrt{7}$

(2)

三角形 ABC, ABD において

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = AC^2 \\ AB^2 + BD^2 &= 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = AD^2 \end{aligned}$$

より、 $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ABD = 90^\circ$ である。ゆえに、辺 AB は三角形 BCD を含む平面と垂直である。したがって、四面体 ABCD の底面を三角形 BCD とみると、高さは AB であるから

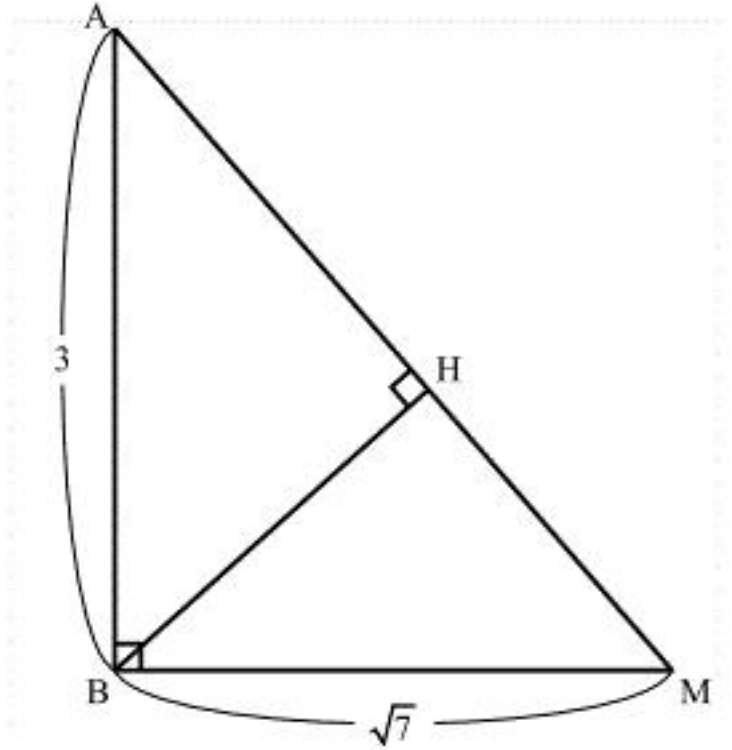
$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

となる。

(答) $3\sqrt{7}$

(3)

三角形 ABM を取り出すと以下のようになる。



M は三角形 BCD を含む平面上にあるから、(2)より、 $AB \perp BM$ である。三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。三角形 ABH と三角形 AMB は、いずれも直角三角形であり直角以外の 1 つの角が共通であるから、相似である。したがって、

$$\begin{aligned} AB : BH &= AM : MB \\ \Leftrightarrow 3 : BH &= 4 : \sqrt{7} \\ \therefore BH &= \frac{3\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $BH = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

【別解】

三角形 ACD は $AC = AD$ の二等辺三角形であるから、 $AM \perp CD$ である。ゆえに、三角形 ACM に関する三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{AC^2 - CM^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

が得られる。また、(1)より $BM \perp CD$ であるから、平面 $ABM \perp CD$ が成立する。H は平面 ABM 上の点だから、 $AH \perp CD$ であり、また、問題文より $AH \perp AM$ であるから、平面 $ACD \perp BH$ が成立する。したがって、四面体 ABCD の底面を三角形 ACD とみると、高さは BH であるから、四面体 ABCD の体積に関して、

$$\begin{aligned} 3\sqrt{7} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot CD \cdot AM \right) \cdot BH \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{7} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \right) \cdot BH \\ \Leftrightarrow BH &= \frac{3\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $BH = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

V (生活環境学部)

(1)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公差 d の等比数列であるから、一般項は

$$a_n = a + d(n-1)$$

である。したがって、初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(a+a_n)}{2} \\ &= \frac{n\{2a+d(n-1)\}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) S_n = \frac{n\{2a+d(n-1)\}}{2}$$

(2)

(i)

$n \leq 34$ のとき $S_n \leq 0$ であり、 $n \geq 35$ のとき $S_n > 0$ であるから、初項 a は負の整数であり、公差は正の整数である。 $n=34$ のときを考えると

$$\begin{aligned} \frac{34\{2a+d(34-1)\}}{2} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2a+33d &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a &\leq -\frac{33}{2}d \end{aligned}$$

が得られる。また、 $n=35$ のときを考えると

$$\begin{aligned} \frac{35\{2a+d(35-1)\}}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow a+17d &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> -17d \end{aligned}$$

が得られる。これを用いて数列 $\{a_n\}$ を評価すると、

$$\begin{aligned} -17d+d(n-1) &< a+d(n-1) \leq -\frac{33}{2}d+d(n-1) \\ \Leftrightarrow (n-18)d &< a_n \leq \left(n-\frac{35}{2}\right)d \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $n=17$ のとき、 $a_n < 0$ 、 $n=18$ のとき、 $a_n > 0$ である。また、2 以上の n で、 S_n に関して、

$$\begin{aligned} a_n < 0 &\Leftrightarrow S_n < S_{n-1} \\ a_n = 0 &\Leftrightarrow S_n = S_{n-1} \\ a_n > 0 &\Leftrightarrow S_n > S_{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $n=17$ のとき S_n は最小となる。

(答) $n=17$

(ii)

$n=17$ のとき $S_n = -289$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{17(2a+16d)}{2} &= -289 \\ \Leftrightarrow a &= -8d-17 \end{aligned}$$

となる。これを $-17d < a \leq -\frac{33}{2}d$ に代入して整理すると

$$\begin{aligned} -17d < -8d-17 &\leq -\frac{33}{2}d \\ \Leftrightarrow \frac{17}{9} &< d \leq 2 \end{aligned}$$

が得られる。 d は整数より $d=2$ であり、このとき $a=-33$ である。

(答) $a=-33, d=2$

VI（生活環境学部）

(1)

$a=8$ のとき

$$8=be+c$$

が得られる。ここで、 $8>b>c$ 、 $c>d\geq 0$ であるから、 c は1以上6以下の整数である。

[1] $c=6$ のとき

$be=2$ となるが、これを満たす $b(>c)$ は存在しない。

[2] $c=5$ のとき

$be=3$ となるが、これを満たす $b(>c)$ は存在しない。

[3] $c=4$ のとき

$be=4$ となるが、これを満たす $b(>c)$ は存在しない。

[4] $c=3$ のとき

$be=5$ となり、 $b=5, e=1$ の可能性がある。これを $b=cf+d$ に代入すると

$$5=3f+d$$

となる。このとき $c>d$ より $d=0, 1, 2$ が取り得るが、 $5=3f+d$ を満たすのは $(d, f)=(2, 1)$ となる。以上より、 $(b, c, d, e, f)=(5, 3, 2, 1, 1)$ となる。

[5] $c=2$ のとき

$be=6$ となり、 $(b, e)=(6, 1), (3, 2)$ の可能性がある。まず $(b, e)=(6, 1)$ を考える。これを $b=cf+d$ に代入すると

$$6=2f+d$$

となる。このとき $c>d$ より $d=0, 1$ が取り得るが、 $6=2f+d$ を満たす d は偶数より $d=0$ のみである。以上より、 $(b, c, d, e, f)=(6, 2, 0, 1, 3)$ となる。次に、 $(b, e)=(3, 2)$ を考える。これを $b=cf+d$ に代入すると

$$3=2f+d$$

となる。このとき $c>d$ より $d=0, 1$ が取り得るが、 $3=2f+d$ を満たす d は奇数より $d=1$ のみである。以上より、 $(b, c, d, e, f)=(3, 2, 1, 2, 1)$ となる。

[6] $c=1$ のとき

$be=7$ となり、 $(b, e)=(7, 1)$ の可能性がある。これを $b=cf+d$ に代入すると

$$7=f+d$$

となる。このとき $c>d$ より $d=0$ であるから、 $(b, c, d, e, f)=(7, 1, 0, 1, 7)$ となる。

以上[1]～[6]より、求める (b, c, d, e, f) の組は、

$$(b, c, d, e, f)=(3, 2, 1, 2, 1), (5, 3, 2, 1, 1), (6, 2, 0, 1, 3), (7, 1, 0, 1, 7)$$

である。

$$(\text{答}) (b, c, d, e, f)=(3, 2, 1, 2, 1), (5, 3, 2, 1, 1), (6, 2, 0, 1, 3), (7, 1, 0, 1, 7)$$

(2)

条件(ア)、(イ)より、

$$be+c>c \Leftrightarrow be>0$$

であり、 b, e は0以上の整数より、 $e\geq 1$ である。また、(1)で議論したように $c\geq 1$ であるから、

$$a=be+c>ce+c\geq c\times 1+c=2c$$

$$\therefore c<\frac{a}{2}$$

が得られる。

(証明終)

【別解】

$c\geq \frac{a}{2}$ の成立を仮定する。 $b>c$ より $b>\frac{a}{2}$ であるから、 e が0以上の整数であることに注意すると、

$$be>\frac{a}{2} \text{ もしくは } be=0$$

が成立する。 $a=be+c$ について、

[1] $be>\frac{a}{2}$ のとき

$$a=be+c$$

$$>\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$$

$$=a$$

となり矛盾する。

[2] $be=0$ のとき

$a=c$ となり $a>c$ に矛盾する。

以上より、 $c\geq \frac{a}{2}$ の成立を仮定すると矛盾するから、背理法より $c<\frac{a}{2}$ となる。

(証明終)

(3)

$b=cf+d$ において $f=0$ とすると $b=d$ となり条件に反するから $f\neq 0$ である。また、

$a=be+c$ において $e=0$ とすると $a=c$ となり条件に反するから $e\neq 0$ である。ここで

$$a=be+c$$

$$=(cf+d)e+c$$

$$=c(e\cdot f+1)+de$$

$$>d(e\cdot f+1)+de$$

となる。 $e\neq 0, f\neq 0$ だから $e\geq 1, f\geq 1$ より $ef\geq 1$ である。したがって、 $a>d(e\cdot f+1)+de$ より

$$a>d(1+1)+d\cdot 1$$

$$\therefore d<\frac{a}{3}$$

となる。

(証明終)