

I

(1)

円 C の中心は AB の中点であるから、その座標は $\left(\frac{5-1}{2}, \frac{4-6}{2}\right) = (2, -1)$ である。また、この中心を P とすると、円 C の半径は

$$AP = \sqrt{(5-2)^2 + \{4-(-1)\}^2} = \sqrt{34}$$

であるから、円 C の方程式は

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 34$$

である。直線 AB の傾きは $\frac{4+6}{5+1} = \frac{5}{3}$ であり、直線 l は直線 AB と垂直であるから、直線 l の傾き

は $-\frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$ である。また、直線 l は点 $(2, -1)$ を通るから、直線 l の方程式は

$$y - (-1) = -\frac{3}{5}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 円 } C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 34, \text{ 直線 } l: y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

(2)

x, y が整数のとき、 $x-2, y+1$ も整数であり、 $(x-2)^2 \geq 0, (y+1)^2 \geq 0$ より

$$(x-2)^2 \geq 0, 34 - (x-2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 34$$

である。これを満たす $(x-2)^2$ の値は

$$(x-2)^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25$$

となる。それぞれに対し、 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 34$ を満たす $(y+1)^2$ の値は

$$(y+1)^2 = 34, 33, 30, 25, 18, 9$$

である。 $y+1$ は整数より、 $(y+1)^2$ は平方数であるから、 $(y+1)^2 = 9, 25$ に限られる。 $x-2, y+1$

は整数だから、 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 34$ を満たす組み合わせは

$$(x-2, y+1) = (3, 5), (3, -5), (-3, 5), (-3, -5), (5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (5, 4), (5, -6), (-1, 4), (-1, -6), (7, 2), (7, -4), (-3, 2), (-3, -4)$$

である。

$$(\text{答}) (x, y) = (5, 4), (5, -6), (-1, 4), (-1, -6), (7, 2), (7, -4), (-3, 2), (-3, -4)$$

(3)

直線 l 上にあり、 x 座標と y 座標が整数である点を (p, q) とすると

$$q = -\frac{3}{5}p + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 3p + 5q = 1$$

が成り立つ。ここで、直線 l が点 $(2, -1)$ を通ることに注意すると、

$$3p + 5q = 1$$

$$\Leftrightarrow 3(p-2) + 5(q+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(q+1) = 3(2-p)$$

と変形できる。5 と 3 は互いに素だから、 $q+1$ は 3 の倍数である。したがって、 k を整数として、 $q+1 = 3k$ とおけて、 $q = 3k - 1$ である。このとき、

$$5 \cdot 3k = 3(2-p)$$

$$\Leftrightarrow 5k = 2-p$$

$$\Leftrightarrow p = 2-5k$$

であり、このとき p, q はともに整数となる。

$$(\text{答}) (x, y) = (2-5k, 3k-1) \quad (k \text{ は任意の整数})$$

II

(1)

$g(x) = e^x - x$ とおくと、 $x > 0$ で

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x - 1 \\ &> e^0 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $g(x)$ は $x > 0$ で単調増加である。また、 $g(0) = e^0 - 0 = 1$ であるから、 $x \geq 0$ の範囲において $g(x) \geq g(0) > 0$ となる。よって、

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow e^x &> x \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} e^x &> x > 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{1}{e^{3x}} < \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

と変形できる。さらに、 $x > \frac{1}{2}$ において

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{e^{3x}} < \frac{1}{x^3} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{x(2x-1)}{e^{3x}} < \frac{(2x-1)}{x^2} \\ \Leftrightarrow 0 &< f(x) < \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 0$ であるから、はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x-1)e^{-3x} - 3x(2x-1)e^{-3x} \\ &= (-6x^2 + 7x - 1)e^{-3x} \\ &= -(6x-1)(x-1)e^{-3x} \end{aligned}$$

であり、 $f'(x) = 0$ とすると $x = \frac{1}{6}, 1$ であるから、増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{6}$	...	1	...	(∞)
$f'(x)$	-1	-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{9\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^3}$	$\searrow$	(0)

したがって、 $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $\frac{1}{e^3}$ 、 $x=\frac{1}{6}$ で最小値 $-\frac{1}{9\sqrt{e}}$ をとる。

(答) 最大値 $\frac{1}{e^3}$ ($x=1$)、最小値 $-\frac{1}{9\sqrt{e}}$ ($x=\frac{1}{6}$)

(3)

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ であるから、 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ の範囲で、 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を S とすると、部分積分法を用いて

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \{0 - f(x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \{-x(2x-1)e^{-3x}\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(-x)(2x-1)e^{-3x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}(4x-1)e^{-3x} dx \\ &= 0 - \left[-\frac{1}{9}(4x-1)e^{-3x} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{4}{9}e^{-3x} \right\} dx \\ &= \left(\frac{1}{9}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{9} \right) + \left[\frac{4}{27}e^{-3x} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{9}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{9} + \frac{4}{27}e^{-\frac{3}{2}} - \frac{4}{27} \\ &= \frac{7e^{-\frac{3}{2}} - 1}{27} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{7e^{-\frac{3}{2}} - 1}{27}$

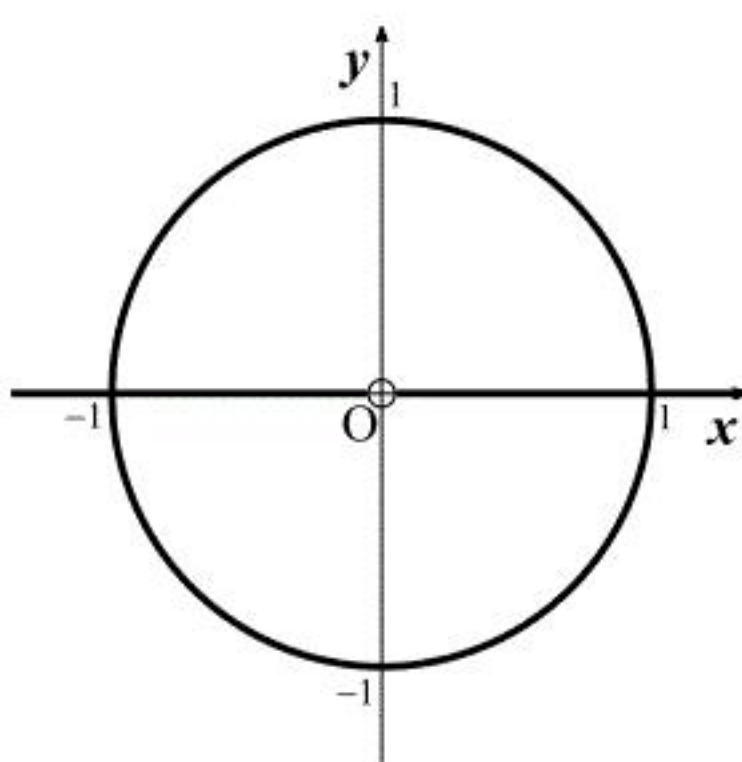
III

(1)

α が実数となるとき、 $\alpha = \bar{\alpha}$ である。このとき、 $z \neq 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\alpha - \bar{\alpha} &= 0 \\ \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} - \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} &= 0 \\ \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} - \bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 \bar{z} + \bar{z} - z \bar{z}^2 - z &= 0 \\ \Leftrightarrow z|z|^2 + \bar{z} - |z|^2 \bar{z} - z &= 0 \\ \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) &= 0\end{aligned}$$

であり、 $z = \bar{z}$ または $|z|^2 = 1$ である。また、 $z = \bar{z}$ であるとき、 z は実数である。したがって、 α が実数となる z が表す図形は次のとおりである。ただし、 $z \neq 0$ より原点を除く。



(答) 上図(ただし原点を除く)

(2)

$$\begin{aligned}|\beta| &= \left| iz + \frac{1}{iz} \right| \\ &= \left| iz - \frac{i}{z} \right| \\ &= |i| \left| z - \frac{1}{z} \right| \\ &= \left| z - \frac{1}{z} \right|\end{aligned}$$

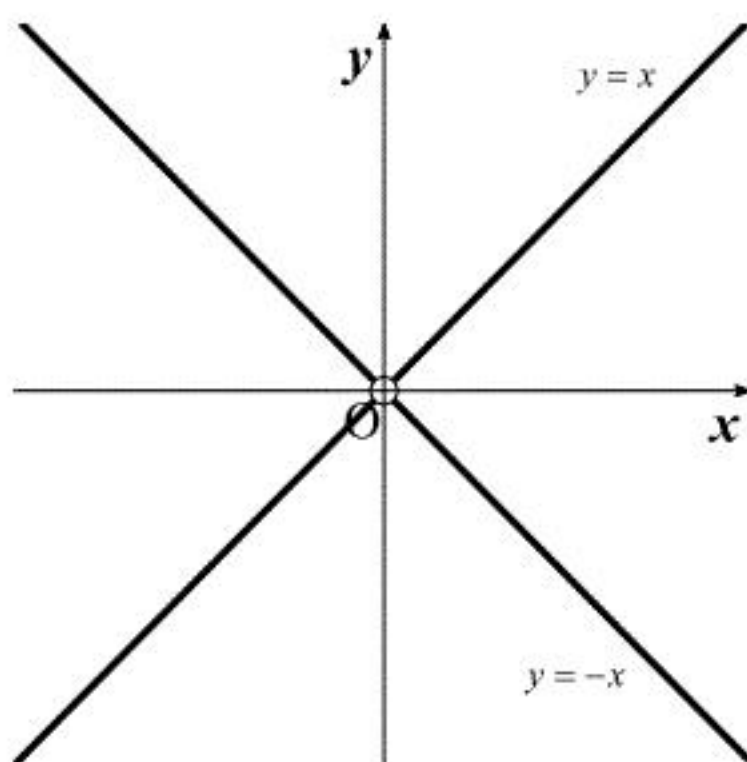
であるから

$$\begin{aligned}|\alpha| &= |\beta| \\ \Leftrightarrow |\alpha|^2 &= |\beta|^2 \\ \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 &= \left| z - \frac{1}{z} \right|^2 \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z} \right) \overline{\left(z + \frac{1}{z} \right)} &= \left(z - \frac{1}{z} \right) \overline{\left(z - \frac{1}{z} \right)} \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) &= \left(z - \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $(x, y) \neq (0, 0)$ である実数 x, y を用いて $z = x + yi$ とおくと

$$\begin{aligned}z^2 + \bar{z}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + yi)^2 + (x - yi)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + y)(x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \pm x\end{aligned}$$

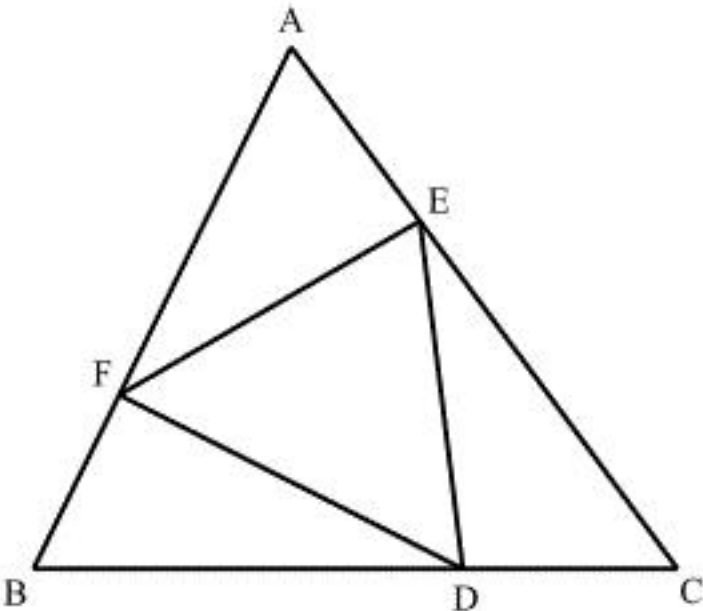
であるから、 $|\alpha| = |\beta|$ をみたす z が表す図形は次のとおりである。ただし、 $z \neq 0$ より、原点を除く。



(答) 上図(ただし原点を除く)

IV

(1)



三角形の面積を3つの頂点を添え字に用いて表すことにする。たとえば、 $\triangle ABC$ の面積は S_{ABC} である。 $\triangle AFE$ の面積について

$$\begin{aligned} S_{AFE} &= S_{ABC} \cdot \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} \\ &= 1 \cdot \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

である。また、対称性から $S_{BDF} = S_{CED} = \frac{x}{(1+x)^2}$ である。ここで $S_{ABC} = S_{AFE} + S_{BDF} + S_{CED} + S_{DEF}$ で

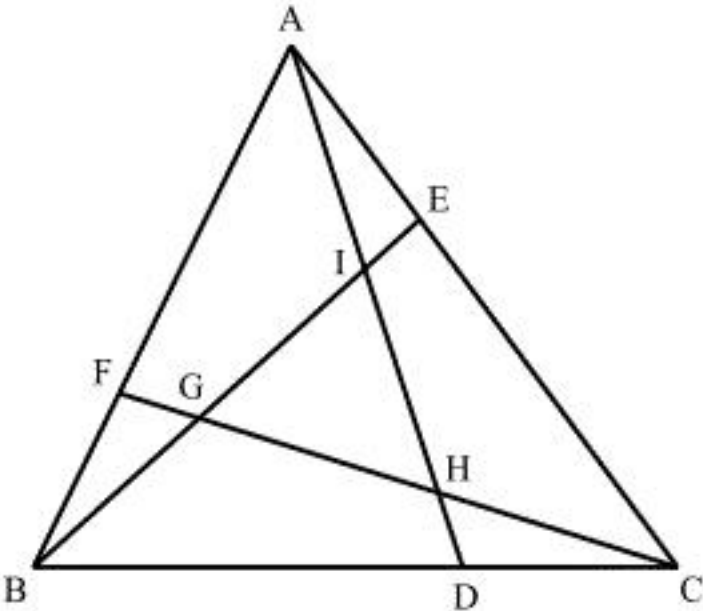
あるから、 $\triangle DEF$ の面積が $\frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AFE} + S_{BDF} + S_{CED} + S_{DEF} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (1+x)^2 &= 6x \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。 $x > 1$ より、 $x = 2 + \sqrt{3}$ である。

(答) $x = 2 + \sqrt{3}$

(2)



$\triangle AFC$ と直線 BE に関するメネラウスの定理より

$$\begin{aligned} \frac{FG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AB}{BF} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{FG}{GC} \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{1+x}{1} &= 1 \\ \Leftrightarrow FG : GC &= 1 : x(1+x) \end{aligned}$$

である。

(答) $FG : GC = 1 : x(1+x)$

(3)

$\triangle GBC$ の面積について

$$\begin{aligned} S_{GBC} &= S_{FBC} \cdot \frac{GC}{FC} \\ &= S_{ABC} \cdot \frac{FB}{AB} \cdot \frac{GC}{FC} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{x(1+x)}{1+x(1+x)} \\ &= \frac{x}{1+x(1+x)} \end{aligned}$$

である。同様にして、 $S_{HCA} = \frac{x}{1+x(1+x)}$ 、 $S_{IAB} = \frac{x}{1+x(1+x)}$ である。ここで

$S_{ABC} = S_{GBC} + S_{HCA} + S_{IAB} + S_{GHI}$ であるから、 $\triangle GHI$ の面積が $\frac{1}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{GBC} + S_{HCA} + S_{IAB} + S_{GHI} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{x}{1+x(1+x)} + \frac{x}{1+x(1+x)} + \frac{x}{1+x(1+x)} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 4\{1+x(1+x)\} &= 12x + 1 + x(1+x) \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。 $x > 1$ より、 $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ である。

(答) $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

V

(1)

$x^n - ax - b$ が $x-1$ で割り切れるとき、整式 $Q_1(x)$ を用いて

$$x^n - ax - b = (x-1)Q_1(x)$$

と表せる。両辺に $x=1$ を代入して

$$1 - a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 1 - a$$

である。

(答) $b = 1 - a$

(2)

$x^n - ax - b$ が $x^2 + x - 2$ で割り切れるとき、整式 $Q_2(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} x^n - ax - b &= (x^2 + x - 2)Q_2(x) \\ &= (x+2)(x-1)Q_2(x) \end{aligned}$$

と表せる。両辺に $x=-2$ と $x=1$ を代入して得られる連立方程式を解くと

$$\begin{cases} (-2)^n + 2a - b = 0 \\ 1 - a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1 - (-2)^n}{3}, b = \frac{2 + (-2)^n}{3}$$

となる。

(答) $a = \frac{1 - (-2)^n}{3}, b = \frac{2 + (-2)^n}{3}$

(3)

$x^n - ax - b$ が $x^2 - 2x + 1$ で割り切れるとき、整式 $Q_3(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} x^n - ax - b &= (x^2 - 2x + 1)Q_3(x) \\ &= (x-1)^2 Q_3(x) \end{aligned}$$

と表せる。両辺に $x=1$ を代入すると

$$1 - a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 1 - a$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} x^n - ax - (1-a) &= (x^n - 1) - a(x-1) \\ &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) - a(x-1) \\ &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 - a) \end{aligned}$$

であるから、 $x^n - ax - b$ が $x^2 - 2x + 1$ で割り切れる必要十分条件は、 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 - a$ が $x-1$ で割り切れることである。 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 - a$ が $x-1$ で割り切れるとき、整式 $Q_4(x)$ を用いて

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 - a = (x-1)Q_4(x)$$

と表せる。両辺に $x=1$ を代入すると

$$n - a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = n$$

となる。また、 $b = 1 - n$ となる。

(答) $a = n, b = 1 - n$

VI

(1)

$a > 0$ より, $x_k = \frac{y_k - b}{a}$ である。このとき変量 x の平均 m について

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 x_k \\ &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 \frac{y_k - b}{a} \\ &= \frac{1}{9a} \sum_{k=1}^9 y_k - \frac{b}{a} \\ &= 0 - \frac{b}{a} \\ \therefore m &= -\frac{b}{a} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と変形できる。また, 変量 x の標準偏差 s について

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 (x_k - m)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 \left(\frac{y_k - b}{a} + \frac{b}{a} \right)^2} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 (y_k - 0)^2} \quad (\because a > 0) \\ &= \frac{1}{a} \times 1 \\ \therefore s &= \frac{1}{a} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①, ②より, $a = \frac{1}{s}, b = -\frac{m}{s}$ を得る。

(答) $a = \frac{1}{s}, b = -\frac{m}{s}$

(2)

x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 の平均と標準偏差をそれぞれ n, t とおく。ただし, $t \geq 0$ である。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 x_k &= \sum_{k=1}^4 x_k + \sum_{k=5}^9 x_k \\ \Leftrightarrow 9m &= 4m + 5n \\ \Leftrightarrow n &= m \end{aligned}$$

である。また, 標準偏差について

$$\begin{cases} s^2 = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 (x_k - m)^2 \\ (s+1)^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 (x_k - m)^2 \\ t^2 = \frac{1}{5} \sum_{k=5}^9 (x_k - m)^2 \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 (x_k - m)^2 &= \sum_{k=1}^4 (x_k - m)^2 + \sum_{k=5}^9 (x_k - m)^2 \\ \Leftrightarrow 9s^2 &= 4(s+1)^2 + 5t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 &= s^2 - \frac{8}{5}s - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow t^2 &= \left(s + \frac{2}{5} \right) (s-2) \end{aligned}$$

であり, $t^2 \geq 0, s \geq 0$ より $s \geq 2$ である。このとき, $t = \sqrt{s^2 - \frac{8}{5}s - \frac{4}{5}}$ である。

(答) 平均 m , 標準偏差 $\sqrt{s^2 - \frac{8}{5}s - \frac{4}{5}}$