

I

(1)

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AA}$ であることに着目すると

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{a} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

(2)

辺 AD と辺 BC が平行であるとき

$$\vec{c} = k\vec{a} \quad (k < 0)$$

と表せる。このとき

$$\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - k\vec{a}$$

$$= -(1+k)\vec{a} - \vec{b}$$

であり、この条件の下で $\vec{p} = \vec{0}$ は四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分条件であることを、十分条件と必要条件に分けて証明する。

[1] $\vec{p} = \vec{0}$ のとき

$$\vec{p} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{d}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{d} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow |-(1+k)\vec{a} - \vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}| \cdot k\vec{a} + |k\vec{a}|\{-(1+k)\vec{a} - \vec{b}\} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \{|-(1+k)\vec{a} - \vec{b}| + k|\vec{b}| - (1+k)|k\vec{a}|\}\vec{a} + (|\vec{a}| - |k\vec{a}|)\vec{b} = \vec{0}$$

であり、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} |-(1+k)\vec{a} - \vec{b}| + k|\vec{b}| - (1+k)|k\vec{a}| = 0 \\ |\vec{a}| - |k\vec{a}| = 0 \end{cases}$$

が得られる。

$$|\vec{a}| - |k\vec{a}| = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-|k|)|\vec{a}| = 0$$

となり、 $|\vec{a}| \neq 0$ より $|k| = 1$ だとわかる。よって、 $k < 0$ より $k = -1$ であり、このとき $\vec{c} = -\vec{a}$

となるから辺 AD と辺 BC は平行かつ長さが等しく、四角形 ABCD は平行四辺形である。

[2] 四角形 ABCD が平行四辺形であるとき

このとき、

$$\begin{cases} \vec{c} = -\vec{a} \\ \vec{d} = -\vec{b} \end{cases}$$

が成り立ち

$$\vec{p} = |\vec{d}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{d}$$

$$= |-\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|(-\vec{a}) + |-\vec{a}|(-\vec{b})$$

$$= |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{b}$$

$$= \vec{0}$$

となる。

以上[1], [2]より、辺 AD と辺 BC が平行であるとき、 $\vec{p} = \vec{0}$ は四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分条件である。

(証明終)

II

(1)

2回目の試行の後、箱の中のカードが4枚である事象は

[1] 1回目の試行で取り出したカードの番号が1, 3, 5のいずれかであり、2回目の試行で取り出したカードの番号が2, 4のどちらかである場合

[2] 1回目の試行で取り出したカードの番号が2, 4のどちらかであり、2回目の試行で取り出したカードの番号が1, 3, 5のいずれかである場合

に場合分けできる。以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{50}$$

である。

(答) $\frac{27}{50}$

(2)

2回目の試行の後の箱の中のカードの枚数で場合分けする。

[1] 2回目の試行の後、箱の中のカードが5枚である場合

この場合に3回目の試行で取り出したカードの番号が3である確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{125}$$

である。

[2] 2回目の試行の後、箱の中のカードが4枚である場合

この場合に3回目の試行で取り出したカードの番号が3である確率は(1)より

$$\frac{27}{50} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{200}$$

である。

[3] 2回目の試行の後、箱の中のカードが3枚である場合

この場合に3回目の試行で取り出したカードの番号が3である確率は

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は

$$\frac{9}{125} + \frac{27}{200} + \frac{1}{30} = \frac{721}{3000}$$

と求まる。

(答) $\frac{721}{3000}$

(3)

まず、1回目、3回目の試行で取り出したカードの番号がどちらも3である確率を求める。2回目の試行の後の箱の中のカードの枚数で場合分けする。

[1] 2回目の試行の後、箱の中のカードが5枚である場合

この場合に1回目、3回目の試行で取り出したカードの番号がどちらも3である確率は

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{125}$$

である。

[2] 2回目の試行の後、箱の中のカードが4枚である場合

この場合に1回目、3回目の試行で取り出したカードの番号がどちらも3である確率は

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{50}$$

である。

以上[1], [2]より、1回目、3回目の試行で取り出したカードの番号がどちらも3である確率は

$$\frac{3}{125} + \frac{1}{50} = \frac{11}{250}$$

である。よって求めるべき確率、すなわち3回目の試行で取り出したカードの番号が3であるとき、1回目の試行で取り出したカードの番号も3である条件付き確率は、(2)より

$$\frac{\frac{11}{250}}{\frac{721}{3000}} = \frac{132}{721}$$

と求まる。

(答) $\frac{132}{721}$

Ⅲ

(1)

関数 $f(x) = x - 1 - \log x (x > 0)$ について

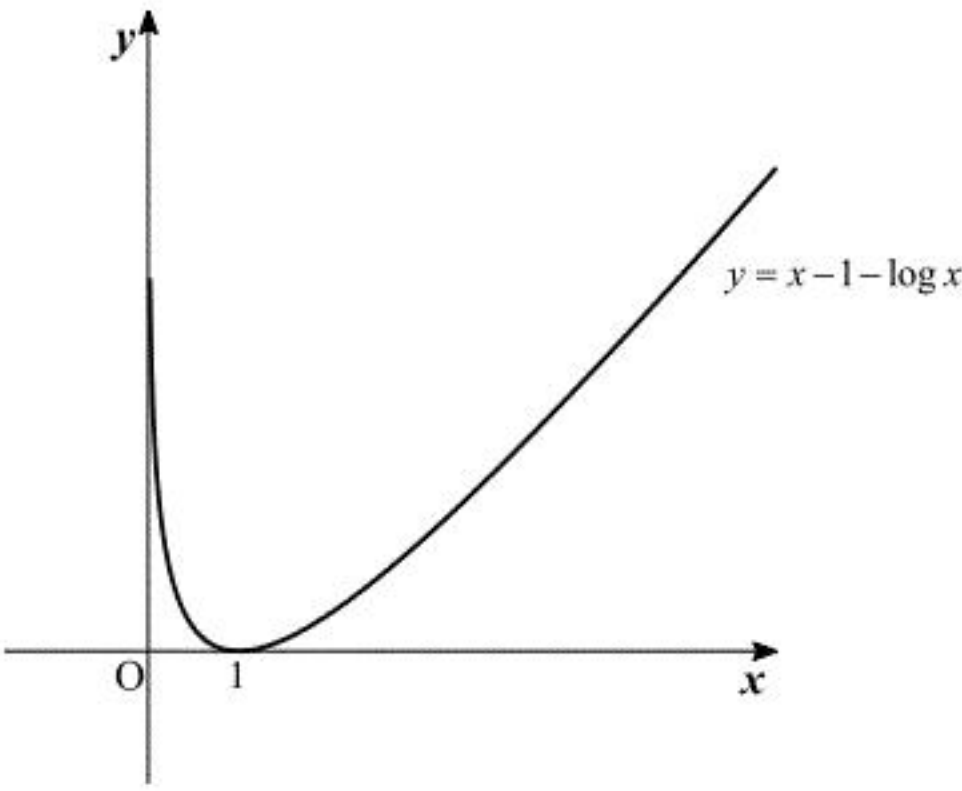
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

であるから、関数 $f(x)$ は定義域内で常に下に凸である。よって、グラフの増減及び凹凸は以下ようになる。

x	0	...	1	...
$f''(x)$		+	+	+
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	0	↗

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ であり、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ であることを利用すると、 C のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 増減・凹凸:前表, 極値: $x=1$ で極小値 0 , C の概形:前図

(2)

ℓ は C 上の点 $(p, p - 1 - \log p)$ における接線であるから、 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)(x - p) + p - 1 - \log p \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)x - \log p \end{aligned}$$

である。

(答) $y = \left(1 - \frac{1}{p}\right)x - \log p$

(3)

ℓ の方程式に $(r, 0)$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)r - \log p \\ \Leftrightarrow \log p &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)r \end{aligned}$$

となる。ここで、 $p > 1$ より $1 - \frac{1}{p} \neq 0$ であるから

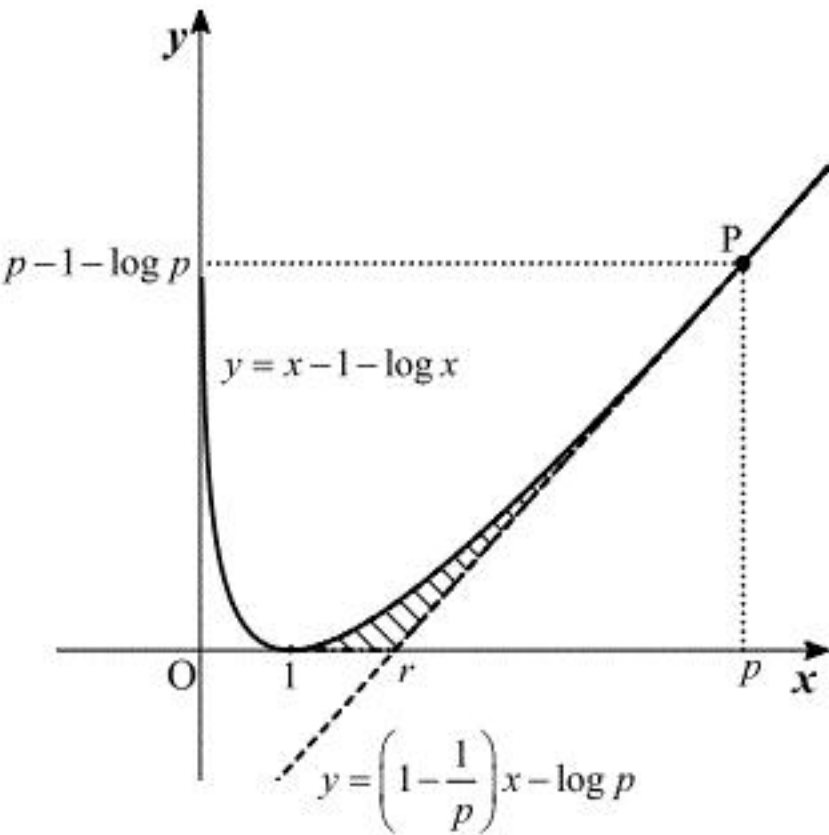
$$\begin{aligned} r &= \frac{\log p}{1 - \frac{1}{p}} \\ &= \frac{p}{p-1} \log p \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = \frac{p}{p-1} \log p$

(4)

$p > 1$ であることから、 C と ℓ のグラフの概形は以下ようになり、面積を求める領域は下図の斜線部となる。



よって、求める面積 S は

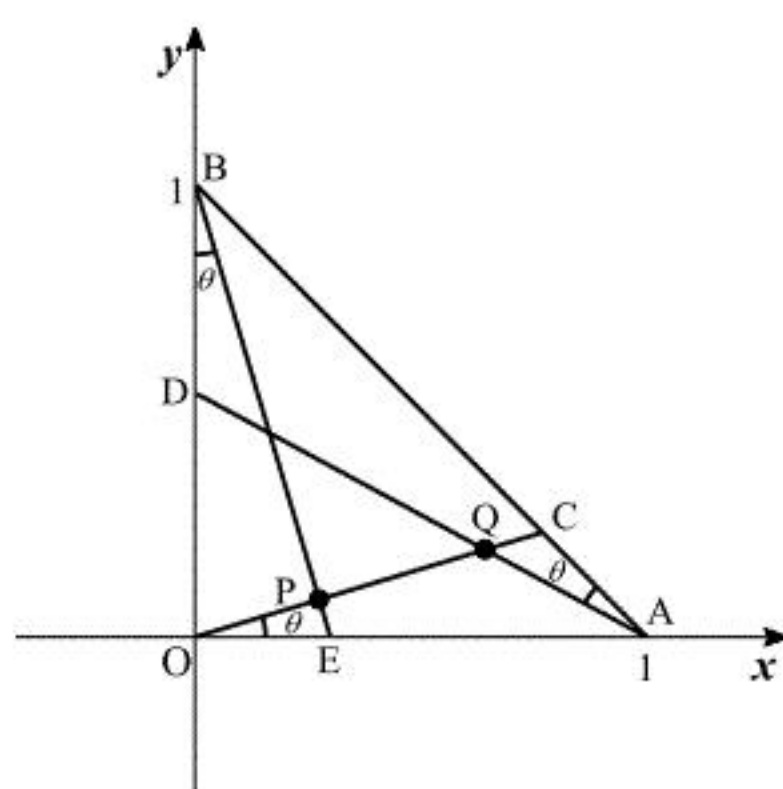
$$\begin{aligned} S &= \int_1^p (x - 1 - \log x) dx - \frac{1}{2}(p - r)(p - 1 - \log p) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x \log x \right]_1^p - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p-1} (p - 1 - \log p)^2 \\ &= \left(\frac{p^2}{2} - p \log p \right) - \left(\frac{1}{2} - \log 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p-1} (p - 1 - \log p)^2 \\ &= \frac{(p-1)^2 - p(\log p)^2}{2(p-1)} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = \frac{(p-1)^2 - p(\log p)^2}{2(p-1)}$

IV

(1)



2 点 P, Q の座標を $P(X_p, Y_p)$, $Q(X_q, Y_q)$ とおく。 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ より $t = \tan \theta$ の範囲は $0 < t < 1$ で

あることに注意すると、各直線の式は

$$AB: y = -x + 1$$

$$OC: y = x \tan \theta$$

$$= tx$$

$$BE: y = -x \tan(90^\circ - \theta) + 1$$

$$= -\frac{x}{\tan \theta} + 1$$

$$= -\frac{1}{t}x + 1$$

$$AD: y = -\tan(45^\circ - \theta)(x - 1)$$

$$= -\frac{\tan 45^\circ - \tan \theta}{1 + \tan 45^\circ \tan \theta}(x - 1)$$

$$= -\frac{-t + 1}{t + 1}(x - 1)$$

と表せる。 P は線分 OC と線分 BE の交点であるから

$$tX_p = -\frac{1}{t}X_p + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)X_p = 1$$

となり、 $t + \frac{1}{t} \neq 0$ より

$$X_p = \frac{t}{t^2 + 1}$$

$$Y_p = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

と求まる。 Q は線分 OC と線分 AD の交点であるから

$$tX_q = -\frac{-t + 1}{t + 1}(X_q - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{t + 1} \cdot X_q = \frac{-t + 1}{t + 1}$$

となり、 $\frac{t^2 + 1}{t + 1} \neq 0$ より

$$X_q = \frac{-t + 1}{t + 1} \cdot \frac{t + 1}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{-t + 1}{t^2 + 1}$$

$$Y_q = \frac{t(-t + 1)}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{-t^2 + t}{t^2 + 1}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{t}{t^2 + 1}, \frac{t^2}{t^2 + 1}\right), Q\left(\frac{-t + 1}{t^2 + 1}, \frac{-t^2 + t}{t^2 + 1}\right)$$

(2)

C の x 座標を X_c とすると、 C は線分 OC と線分 AB の交点であるから

$$-X_c + 1 = tX_c$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)X_c = 1$$

となり、 $t + 1 \neq 0$ より

$$X_c = \frac{1}{t + 1}$$

とわかる。 P が線分 OC を $s:(1-s)$ に内分するとき

$$X_c : X_p$$

$$= OC : OP$$

$$= 1 : s$$

であることを利用すると

$$s = \frac{X_p}{X_c}$$

$$= \frac{\frac{t}{t^2 + 1}}{\frac{1}{t + 1}}$$

$$= \frac{t(t + 1)}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{(t^2 + 1) + (t - 1)}{t^2 + 1}$$

$$= 1 + \frac{t - 1}{t^2 + 1}$$

$$= 1 - X_q$$

$$\therefore X_q = 1 - s$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad 1 - s$$

(3)

P が線分 OC を 3:2 に内分するとき

$$s = \frac{3}{5}$$

であり、

$$X_q = 1 - s = \frac{2}{5}$$

と求まる。このとき、 t の値は

$$X_q = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t + 1}{t^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(-t + 1) = 2(t^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)(t + 3) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} (\because 0 < t < 1)$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{2}$$

$t = \frac{1}{2}$ のとき、

$$X_p = \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

となる。以上より、 P と Q は同一直線 OC 上にあり、かつ x 座標が等しいから、 Q は P と一致する。

(証明終)

(1)

xy 平面上で 2 つの不等式

$$3x + y \geq 36 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y \leq 36 \quad \dots \textcircled{2}$$

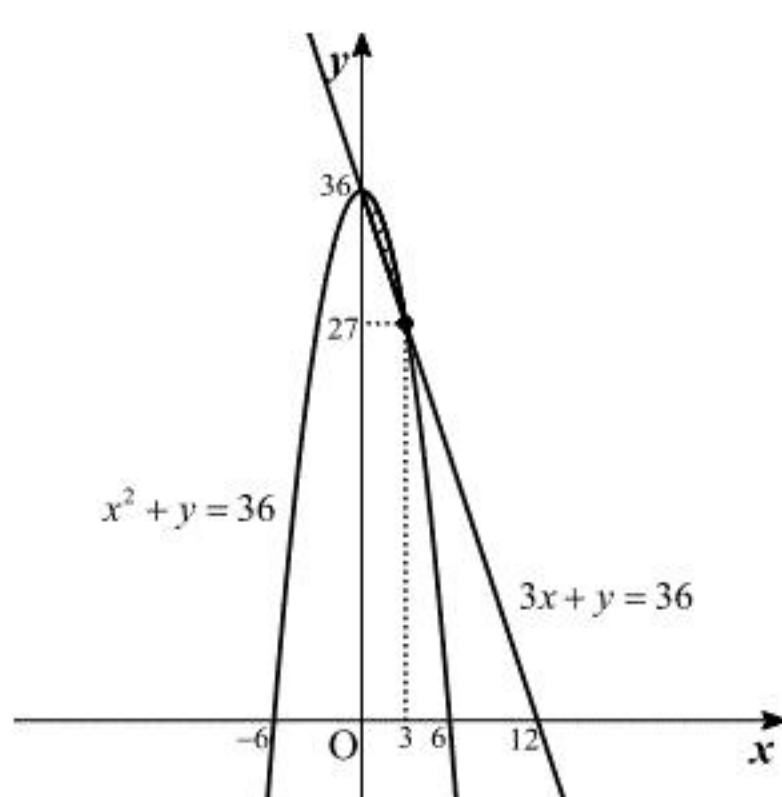
を同時に満たす領域を領域 D とする。

$$-3x + 36 = -x^2 + 36$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, 3$$

に注意すると、領域 D は下図の斜線部(但し境界は含む)である。



不等式①、②を同時に満たす自然数の組 (x, y) の個数は、上図の領域に含まれる格子点から点 $(0, 36)$ を除いたものの個数に等しい。求める格子点数を N_3 とし、領域 D 上かつ

$x = k$ ($k = 1, 2, 3$) 上にある格子点数を $A_{3,k}$ とすると、

$$\begin{aligned} A_{3,k} &= (-k^2 + 36) - (-3k + 36) + 1 \\ &= -k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} N_3 &= \sum_{k=1}^3 A_{3,k} \\ &= \sum_{k=1}^3 (-k^2 + 3k + 1) \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 7 個

(2)

xy 平面上で 2 つの不等式

$$nx + y \geq 4n^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$x^2 + y \leq 4n^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

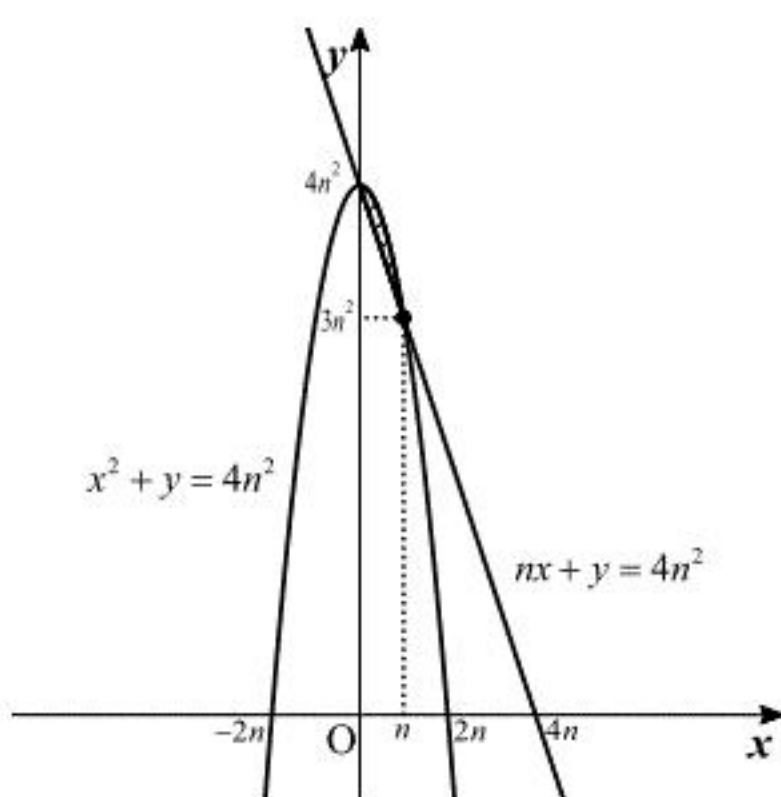
を同時に満たす領域を領域 E とする。

$$-nx + 4n^2 = -x^2 + 4n^2$$

$$\Leftrightarrow x(x - n) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, n$$

に注意すると、領域 E は下図の斜線部(但し境界は含む)である。



不等式③、④を同時に満たす自然数の組 (x, y) の個数は、上図の領域に含まれる格子点から点 $(0, 4n^2)$ を除いたものの個数に等しい。求める格子点数を N_n とし、領域 E 上かつ

$x = k$ ($k = 1, \dots, n$) 上にある格子点数を $A_{n,k}$ とすると、

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= (-k^2 + 4n^2) - (-nk + 4n^2) + 1 \\ &= -k^2 + nk + 1 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^n A_{n,k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-k^2 + nk + 1) \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{6}n\{-(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + 6\} \\ &= \frac{1}{6}n(n^2 + 5) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{6}n(n^2 + 5)$ 個

VI

(1)

連続した6個の自然数を $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ とする。これらを6で割った余りをそれぞれ $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ とすると

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

であり $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ のそれぞれに $0, 1, 2, 3, 4, 5$ のいずれかが重複なく対応していることに着目する。 $6 = 2 \cdot 3$ と素因数分解できることに注意して、 $r_i (1 \leq i \leq 6)$ の値で場合分けする。

[1] $r_i = 0$ の場合

N_i は6の倍数であり6と互いに素ではない。

[2] $r_i = 2, 4$ の場合

N_i は2の倍数であり6と互いに素ではない。

[3] $r_i = 3$ の場合

N_i は3の倍数であり6と互いに素ではない。

[4] $r_i = 1, 5$ の場合

N_i は2の倍数でも3の倍数でもないので6と互いに素である。

以上[1], [2], [3], [4]より、連続した6個の自然数のうち、6と互いに素であるものはちょうど2個ある。

(証明終)

(2)

(1)で存在することを示した2個の自然数の組は、以下の2通りに表せる。

[1] 非負整数 k を用いて $6k+1, 6k+5$ と表せるとき

背理法を利用して、これら2数が互いに素であることを示す。すなわち、これら2数がある素数 p を公約数にもつと仮定して矛盾を導く。仮定よりこれら2数について、 $a < b$ を満たす2自然数 a, b を用いて

$$6k+1 = ap \quad \dots \textcircled{1}$$

$$6k+5 = bp \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$4 = (b-a)p$$

が得られる。この条件を満たす $(b-a, p)$ の組は

$$(b-a, p) = (2, 2)$$

に限る。しかし、 $6k+1, 6k+5$ は奇数なので公約数に2をもつことはなく、これは仮定に矛盾する。

[2] 自然数 k を用いて $6k-1, 6k+1$ と表せるとき

背理法を利用して、これら2数が互いに素であることを示す。すなわち、これら2数がある素数 p を公約数にもつと仮定して矛盾を導く。仮定よりこれら2数について、 $c < d$ を満たす2自然数 a, b を用いて

$$6k-1 = cp \quad \dots \textcircled{3}$$

$$6k+1 = dp \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。 $\textcircled{4} - \textcircled{3}$ より

$$2 = (d-c)p$$

が得られる。この条件を満たす $(d-c, p)$ の組は

$$(d-c, p) = (1, 2)$$

に限る。しかし、 $6k-1, 6k+1$ は奇数なので公約数に2をもつことはなく、これは仮定に矛盾する。

以上[1], [2]より、仮定は誤りであり、(1)で存在することを示した2個の自然数は互いに素である。

(証明終)