

I (理学部)

(1)

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とすると、円 C の方程式が $x^2 + y^2 = 1$ であることより点 A, B を通る接線の方程式はそれぞれ

$$x_1x + y_1y = 1$$

$$x_2x + y_2y = 1$$

である。これらの接線は点 $P(a, b)$ を通るから、

$$ax_1 + by_1 = 1$$

$$ax_2 + by_2 = 1$$

が成り立つ。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

一般的に、2 点を通る直線はただ一つに特定される。また、直線 $ax + by = 1$ を考えたとき、(1) より、

$$ax_1 + by_1 = 1$$

$$ax_2 + by_2 = 1$$

が成り立つから、 A, B はともに直線 $ax + by = 1$ 上にある。したがって、2 点 A, B を通る直線 l の方程式は

$$ax + by = 1$$

である。

(証明終)

(3)

点 $Q(c, d)$ とおくと点 Q は直線 l 上にあるから c, d は

$$ac + bd = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また(1), (2)と同様に考えると直線 m の方程式は

$$cx + dy = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで①より $(x, y) = (a, b)$ は②を満たすことが分かる。これは直線 m が点 P を通ることを表している。したがって題意は示された。

(証明終)

(4)

三角形 OPQ が正三角形であるとき、 $P(a, b), Q(c, d)$ であるから

$$OP^2 = OQ^2 = PQ^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

となる。ここで①より $ac + bd = 1$ であるから

$$c^2 + d^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2(ac + bd)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2$$

となる。したがって、 $OP = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ ($\because OP > 0$) である。

(答) $\sqrt{2}$

Ⅱ (理学部)

(1)

さいころを2回投げて出る目の組は 6^2 (通り)あり、それぞれの組が出る確率は同様に確からしい。さいころを2回投げて出た目の積がちょうど6になるのは出た目の組が

$$(1, 6), (2, 3)$$

となる場合である。出た目の組は2通りであり、目の出る順番を考慮すると求める確率は

$$\frac{2 \cdot 2!}{6^2} = \frac{1}{9}$$

である。また積が6以下になるのは出た目の組が

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3)$$

となる場合である。出た目の組は8通りであり、目の出る順番を考慮すると求める確率は

$$\frac{6 \cdot 2! + 2 \cdot 1}{6^2} = \frac{7}{18}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p(2) = \frac{1}{9}, q(2) = \frac{7}{18}$$

(2)

さいころを n 回投げた時に出る目の組は 6^n 通りあり、これらが出る確率は同様に確からしい。ここで $n \geq 3$ とする。まず、 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が6以下となるためには n 回のうち少なくとも $n-2$ 回は1が出ることが必要であることを示す。 n 回のうち1が出る回数が $n-3$ 以下であると仮定すると、ある3回の試行で2以上の目が出ていることになる。このとき、

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq 2^3 \cdot 1^{n-3} = 8$$

となり、 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が6以下とならない。したがって、 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が6以下となるためには n 回のうち少なくとも $n-2$ 回は1が出ることが必要である。ゆえに、出た目の積がちょうど6になる場合、6以下になる場合ともに、 $n-2$ 個の1と(1)で考えた出た目の組が出ることを考える。

[1] 積がちょうど6になる場合

6が1回出てそれ以外はすべて1が出るか、2, 3が1回ずつ出てそれ以外は1が出るかのどちらかである。これらの目の出方はそれぞれ

$$\frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} = n \text{ (通り)}$$

$$\frac{n!}{1 \cdot 1 \cdot (n-2)!} = n(n-1) \text{ (通り)}$$

であるから求める確率 $p(n)$ は

$$\frac{n + n(n-1)}{6^n} = \frac{n^2}{6^n}$$

である。

[2] 積が6以下になる場合

[1]と同様に考えると目の出方は

$$1 \cdot \frac{n!}{n!} + 5 \cdot \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} + 1 \cdot \frac{n!}{2! (n-2)!} + 1 \cdot \frac{n!}{1 \cdot 1 \cdot (n-2)!} = \frac{3}{2} n^2 + \frac{7}{2} n + 1 \text{ (通り)}$$

である。したがって求める確率 $q(n)$ は $\frac{1}{6^n} \left(\frac{3}{2} n^2 + \frac{7}{2} n + 1 \right)$ となる。

以上より $p(n) = \frac{n^2}{6^n}$, $q(n) = \frac{1}{6^n} \left(\frac{3}{2} n^2 + \frac{7}{2} n + 1 \right)$ となり、これは $n=2$ でも成立する。

$$(\text{答}) \quad p(n) = \frac{n^2}{6^n}, q(n) = \frac{1}{6^n} \left(\frac{3}{2} n^2 + \frac{7}{2} n + 1 \right)$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{p(n)}{q(n)} &= \frac{\frac{n^2}{6^n}}{\frac{1}{6^n} \left(\frac{3}{2} n^2 + \frac{7}{2} n + 1 \right)} \\ &= \frac{n^2}{\frac{3}{2} n^2 + \frac{7}{2} n + 1} \\ &= \frac{2}{3 + \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}} \quad (\because n \neq 0) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 + \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}$$

Ⅲ (理学部)

(1)

真数条件より $x > 0$ である。このとき、

$$\begin{aligned}\log x &= \frac{1}{2} \log 2x \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{2x} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &= 0 \\ \therefore x &= 2\end{aligned}$$

となる。したがって、曲線 C_1 と C_2 の共有点の座標は $(2, \log 2)$ である。

(答) $(2, \log 2)$

(2)

s, t を 0 より大きい実数として、曲線 C_1, C_2 上のある点の x 座標をそれぞれ s, t とおく。曲線

C_1, C_2 の式の両辺をそれぞれ x で微分すると $y' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{2x}$ となるから、曲線 C_1, C_2 にそれぞれ

$x = s, x = t$ で接する接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{s}(x-s) + \log s \\ y &= \frac{1}{2t}(x-t) + \frac{1}{2} \log 2t\end{aligned}$$

と表せる。これらが単一の直線を表すとき、

$$\frac{1}{s}(x-s) + \log s = \frac{1}{2t}(x-t) + \frac{1}{2} \log 2t$$

が x の恒等式となる。したがって

$$\begin{cases} \frac{1}{s} = \frac{1}{2t} & \cdots \textcircled{1} \\ \log s - 1 = \frac{1}{2}(\log 2t - 1) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。①より $s = 2t$ であるから②に代入して

$$\begin{aligned}\log 2t - 1 &= \frac{1}{2}(\log 2t - 1) \\ \Leftrightarrow \log 2t &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{e}{2}\end{aligned}$$

が得られる。したがって、求める接線の方程式は

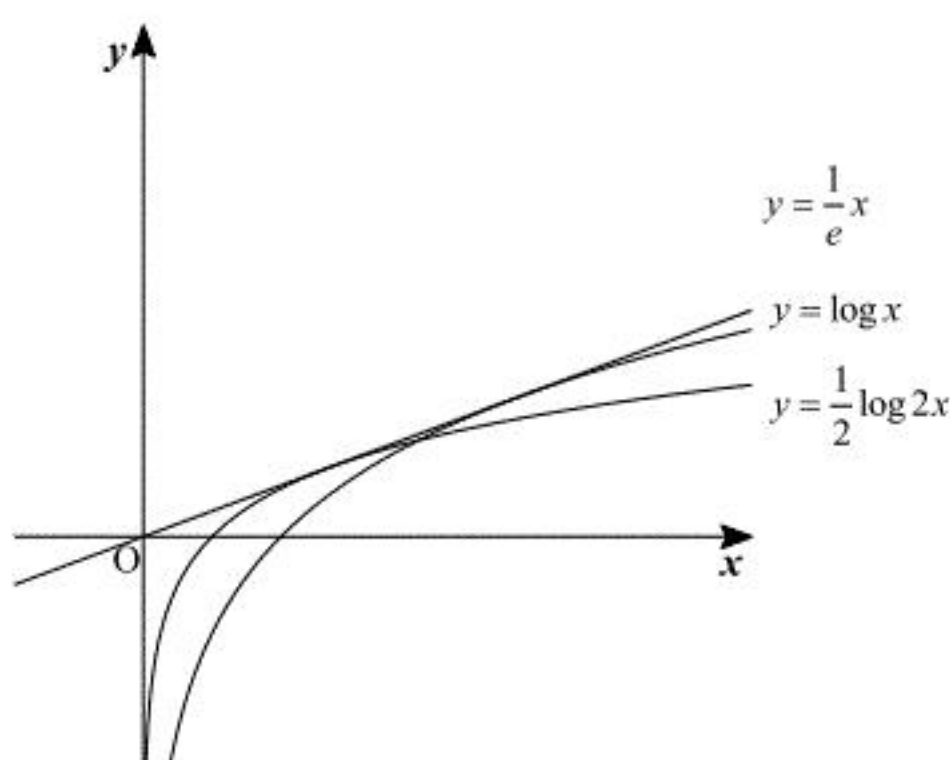
$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{e}\left(x - \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{e}x\end{aligned}$$

であるとわかる。

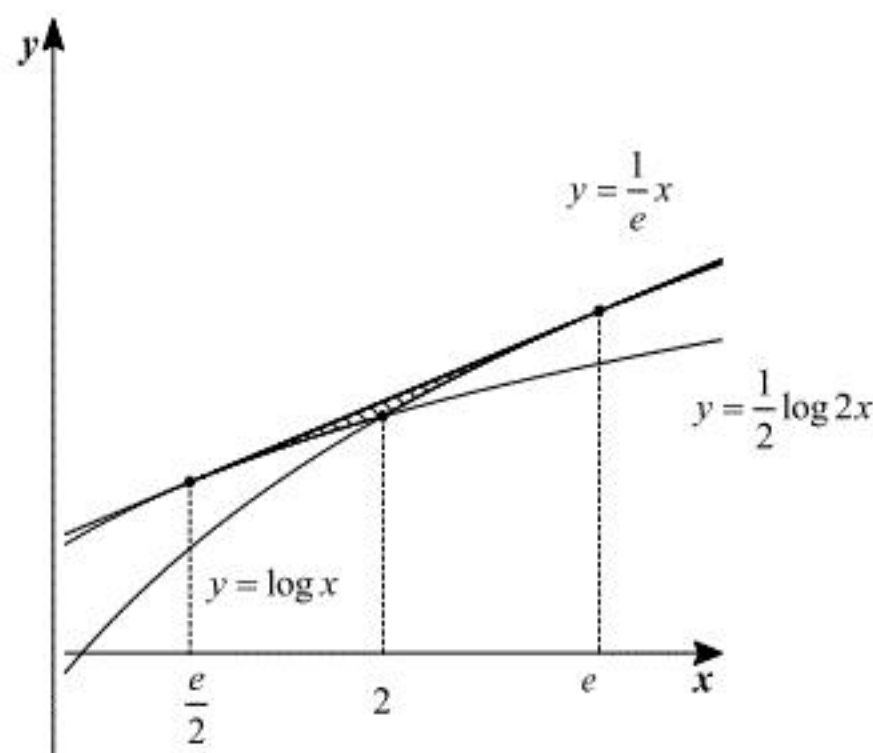
(答) $y = \frac{1}{e}x$

(3)

曲線と接線の位置関係は次図のようになる。



また求める部分を拡大すると次図のようになる。



前図の斜線部の面積が求めるものだから、その面積を S とおくと

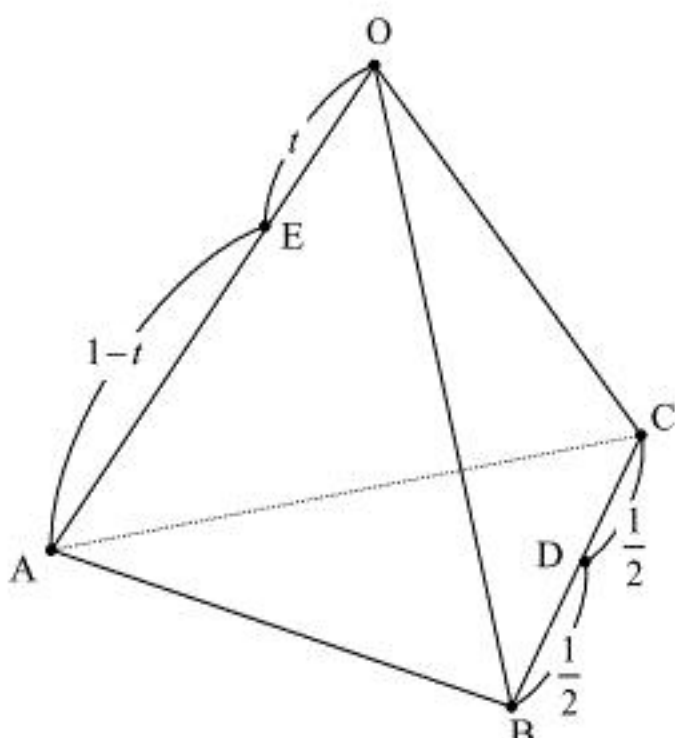
$$\begin{aligned}S &= \int_{\frac{e}{2}}^2 \left(\frac{1}{e}x - \frac{1}{2} \log 2x \right) dx + \int_2^e \left(\frac{1}{e}x - \log x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2e}x^2 \right]_{\frac{e}{2}}^e - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{e}{2}}^2 (2x)' \cdot \log 2x \, dx - \int_2^e (x)' \cdot \log x \, dx \\ &= \frac{1}{2e} \cdot \frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4} \left\{ [2x \log 2x]_{\frac{e}{2}}^2 - \int_{\frac{e}{2}}^2 2x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right\} - \left([x \log x]_2^e - \int_2^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) \\ &= \frac{3}{8}e - \frac{1}{4}(4 \log 4 - e - 4 + e) - (e - 2 \log 2 - e + 2) \\ &= \frac{3}{8}e - 2 \log 2 + 1 + 2 \log 2 - 2 \\ &= \frac{3}{8}e - 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{8}e - 1$

IV (生活環境学部)

(1)



$\triangle OBC$, $\triangle ABC$ は正三角形で、点 D が辺 BC の中点であるから $\angle ODB = \angle ADB = 90^\circ$ である。したがって、三平方の定理より

$$OD = AD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。 $\triangle OAD$ において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{OA^2 + OD^2 - AD^2}{2 \cdot OA \cdot OD} \\&= \frac{1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} \\&= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。 $0 < \alpha < \pi$ だから $\sin \alpha > 0$ となることを考慮すると

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(2)

四面体 OABC は正四面体であるから $\angle BAE = \frac{\pi}{3}$ である。よって、 $\triangle BAE$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} BE^2 &= AE^2 + AB^2 - 2 \cdot AE \cdot AB \cdot \cos \angle BAE \\ \Leftrightarrow BE^2 &= (1-t)^2 + 1 - 2 \cdot (1-t) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow BE^2 &= (1-t)^2 + t \\ \Leftrightarrow BE &= \sqrt{t^2 - t + 1} \quad (\because BE > 0) \end{aligned}$$

となる。また $\triangle EOD$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} DE^2 &= OE^2 + OD^2 - 2 \cdot OE \cdot OD \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow DE^2 &= t^2 + \frac{3}{4} - 2 \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow DE^2 &= t^2 - t + \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow DE &= \sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}} \quad (\because DE > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) 線分 BE の長さは $\sqrt{t^2 - t + 1}$, 線分 DE の長さは $\sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}}$

(3)

△EODにおいて正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{DE}{\sin \alpha} &= \frac{OE}{\sin \beta} \\ \Leftrightarrow \sin \beta &= \frac{OE}{DE} \sin \alpha \\ \therefore \sin \beta &= \frac{t}{\sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}t}{3\sqrt{4t^2 - 4t + 3}}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2\sqrt{6}t}{3\sqrt{4t^2-4t+3}}$

V (生活環境学部)

(1)(i)

$$\begin{aligned} S(4) &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \\ &\quad + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \\ &= (1+3+5+7)(2+4+6+8) \\ &= 320 \end{aligned}$$

となる。

(答) 320

(1)(ii)

(i)より

$$S(n) = \sum_{k=1}^n (2k-1) \sum_{k=1}^n 2k \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せると予想できる。よって、数学的帰納法を利用して、 $\textcircled{1}$ を示す。以下、 l を正の整数とする。

[1] $n=1$ のとき

$$S(1) = 1 \cdot 2$$

となるから、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=l$ のときに $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定したとき

題意より

$$\begin{aligned} S(l+1) &= S(l) + \{1+3+\cdots+(2l-1)\}(2l+2) + (2+4+\cdots+2l)(2l+1) + (2l+1)(2l+2) \\ &= \sum_{k=1}^l (2k-1) \sum_{k=1}^l 2k + \{1+3+\cdots+(2l-1)\}(2l+2) + (2+4+\cdots+2l)(2l+1) + (2l+1)(2l+2) \\ &= \{1+3+\cdots+(2l-1)\}(2+4+\cdots+2l) + \{1+3+\cdots+(2l-1)\}(2l+2) \\ &\quad + (2+4+\cdots+2l)(2l+1) + (2l+1)(2l+2) \\ &= \{1+3+\cdots+(2l+1)\}\{2+4+\cdots+(2l+2)\} \\ &= \sum_{k=1}^{l+1} (2k-1) \sum_{k=1}^{l+1} 2k \end{aligned}$$

となるから、 $n=l+1$ のときにも $\textcircled{1}$ が成り立つ。

以上[1],[2]より、すべての正の整数 n について $S(n) = \sum_{k=1}^n (2k-1) \sum_{k=1}^n 2k$ と表せる。ゆえに、

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \sum_{k=1}^n 2k \\ &= \frac{n}{2}(1+2n-1) \cdot \frac{n}{2}(2+2n) \\ &= n^3(n+1) \\ &= n^4 + n^3 \end{aligned}$$

である。

(答) $n^4 + n^3$

(2)

題意より

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \\ &= 11 \\ T(2) &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ &= (1+4)(2+5) + (1+4)(3+6) + (2+5)(3+6) \\ &= 5 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 \\ &= 143 \end{aligned}$$

となるから、(1)と同様に考えると

$$T(n) = \sum_{k=1}^n (3k-2) \sum_{k=1}^n (3k-1) + \sum_{k=1}^n (3k-2) \sum_{k=1}^n 3k + \sum_{k=1}^n (3k-1) \sum_{k=1}^n 3k \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表されると予想できる。よって数学的帰納法を利用して、 $\textcircled{2}$ を示す。以下、 m を正の整数とする。

[1] $n=1$ のとき

$$T(1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

となるから、 $\textcircled{2}$ が成り立つ。

[2] $n=m$ のときに $\textcircled{2}$ が成り立つと仮定したとき

題意より

$$\begin{aligned} T(m+1) &= T(m) + \{1+4+\cdots+(3m-2)\}(3m+2) + \{2+5+\cdots(3m-1)\}(3m+1) \\ &\quad + \{1+4+\cdots+(3m-2)\}(3m+3) + (3+6+\cdots+3m)(3m+1) \\ &\quad + \{2+5+\cdots(3m-1)\}(3m+3) + (3+6+\cdots+3m)(3m+2) \\ &\quad + (3m+1)(3m+2) + (3m+2)(3m+3) + (3m+1)(3m+3) \\ &= \sum_{k=1}^m (3k-2) \sum_{k=1}^m (3k-1) + \sum_{k=1}^m (3k-2) \sum_{k=1}^m 3k + \sum_{k=1}^m (3k-1) \sum_{k=1}^m 3k \\ &\quad + \sum_{k=1}^m (3k-2) \cdot (3m+2) + \sum_{k=1}^m (3k-1) \cdot (3m+1) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m (3k-2) \cdot (3m+3) + \sum_{k=1}^m 3k \cdot (3m+1) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m (3k-1) \cdot (3m+3) + \sum_{k=1}^m 3k \cdot (3m+2) \\ &\quad + (3m+1)(3m+2) + (3m+2)(3m+3) + (3m+1)(3m+3) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} (3k-2) \sum_{k=1}^{m+1} (3k-1) + \sum_{k=1}^{m+1} (3k-2) \sum_{k=1}^{m+1} 3k + \sum_{k=1}^{m+1} (3k-1) \sum_{k=1}^{m+1} 3k \end{aligned}$$

となるから、 $n=m+1$ のときにも $\textcircled{2}$ が成り立つ。

以上[1],[2]より、すべての正の整数 n について

$$T(n) = \sum_{k=1}^n (3k-2) \sum_{k=1}^n (3k-1) + \sum_{k=1}^n (3k-2) \sum_{k=1}^n 3k + \sum_{k=1}^n (3k-1) \sum_{k=1}^n 3k$$

と表せる。したがって

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^n (3k-2) \sum_{k=1}^n (3k-1) + \sum_{k=1}^n (3k-2) \sum_{k=1}^n 3k + \sum_{k=1}^n (3k-1) \sum_{k=1}^n 3k \\ &= \frac{n}{2}(1+3n-2) \cdot \frac{n}{2}(2+3n-1) + \frac{n}{2}(1+3n-2) \cdot \frac{n}{2}(3+3n) \\ &\quad + \frac{n}{2}(2+3n-1) \cdot \frac{n}{2}(3+3n) \\ &= \frac{n^2}{4} \{ (9n^2-1) + (9n^2+6n-3) + (9n^2+12n+3) \} \\ &= \frac{n^2}{4} (27n^2+18n-1) \\ &= \frac{27}{4}n^4 + \frac{9}{2}n^3 - \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{27}{4}n^4 + \frac{9}{2}n^3 - \frac{1}{4}n^2$

VI (生活環境学部)

(1)

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 3) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq \log_2 x \leq 3$$

となる。これより、

$$2 \leq x \leq 8$$

である。

(答) $2 \leq x \leq 8$

(2)

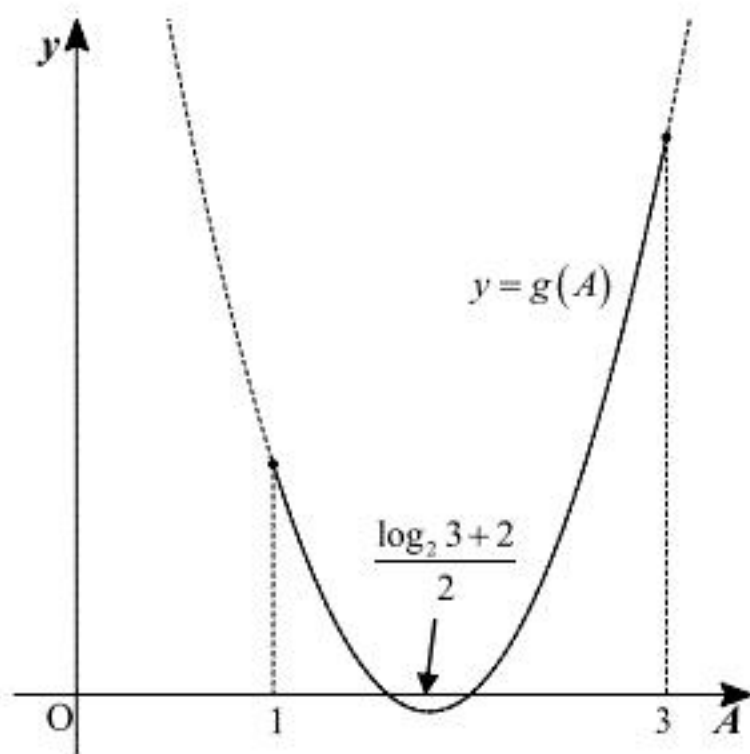
与式より

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{3} \right) \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\log_2 \frac{x}{3}}{\log_2 \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{\log_2 \frac{x}{4}}{\log_2 \frac{1}{2}} \right) \\ &= (\log_2 x - \log_2 3)(\log_2 x - \log_2 4) \\ &= (\log_2 x)^2 - (\log_2 3 + 2) \cdot \log_2 x + 2\log_2 3 \end{aligned}$$

となる。ここで $\log_2 x = A$ ($1 \leq A \leq 3$) とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= A^2 - (\log_2 3 + 2)A + \log_2 9 \\ &= \left(A - \frac{\log_2 3 + 2}{2} \right)^2 + \log_2 9 - \left(\frac{\log_2 3 + 2}{2} \right)^2 \\ &= \left(A - \frac{\log_2 3 + 2}{2} \right)^2 - \left(\frac{\log_2 3 - 2}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

と表せる。これを $g(A)$ とおく。 $1 < \log_2 3 < 2$ より $\frac{3}{2} < \frac{\log_2 3 + 2}{2} < 2$ だから、 $g(A)$ のグラフは下図のようになる。



したがって、図より $g(A)$ は $A = \frac{\log_2 3 + 2}{2}$ のとき最小値をとり、 $A = 3$ のとき最大値をとる。

[1] $A = \frac{\log_2 3 + 2}{2}$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \frac{\log_2 3 + 2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 4) \\ &= \log_2 \sqrt{12} \\ &= \log_2 2\sqrt{3} \\ \therefore x &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となり、これは $2 \leq x \leq 8$ を満たす。このときの $g(A)$ の値は

$$g(A) = \left(A - \frac{\log_2 3 + 2}{2} \right)^2 - \left(\frac{\log_2 3 - 2}{2} \right)^2$$

より $-\frac{1}{4}(\log_2 3 - 2)^2$ である。

[2] $A = 3$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} \log_2 x &= 3 \\ \therefore x &= 8 \end{aligned}$$

となり、これは $2 \leq x \leq 8$ を満たす。このときの $g(A)$ の値は

$$g(A) = A^2 - (\log_2 3 + 2)A + \log_2 9$$

より $3 - \log_2 3$ である。

以上[1], [2]より $f(x)$ は $x = 2\sqrt{3}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}(\log_2 3 - 2)^2$ をとり、 $x = 8$ のとき最大値

$3 - \log_2 3$ をとる。

(答) 最大値： $x = 8$ のとき $3 - \log_2 3$ ，最小値： $x = 2\sqrt{3}$ のとき $-\frac{1}{4}(\log_2 3 - 2)^2$