

【 1 】

[解答]

イ, ウ

[解説]

三辺の長さが $a, b, c (a \leq b \leq c)$ である三角形 ABC が鈍角三角形であるための必要十分条件は、余弦定理より、関係式

$$\begin{aligned} \cos C &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &< c^2 \end{aligned}$$

を満たすことである。問題で与えられた各三角形について、 $a^2 + b^2$ の値と c^2 の値を計算すると以下の表のようになる。

選択肢	$a^2 + b^2$ の値	c^2 の値	鈍角三角形
ア	$10^2 + 13^2 = 269$	$16^2 = 256$	×
イ	$4^2 + 8^2 = 80$	$9^2 = 81$	○
ウ	$2^2 + 3^2 = 13$	$4^2 = 16$	○
エ	$5^2 + 7^2 = 74$	$8^2 = 64$	×
オ	$3^2 + 4^2 = 25$	$5^2 = 25$	×

したがって、答えはイ, ウとなる。

【2】

〔解答〕

最大値: $-1+2\sqrt{2}$, 最小値: $\frac{-3-\sqrt{2}}{2}$

〔解説〕

$t = \sin x + \cos x$ とおくと, $\sin x \cos x, \sin^3 x + \cos^3 x$ はそれぞれ t を用いて

$$\begin{aligned}\sin x \cos x &= \frac{1}{2} \left\{ (\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (t^2 - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x) (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ &= t \left\{ 1 - \frac{1}{2} (t^2 - 1) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} t (t^2 - 3)\end{aligned}$$

と表せるから, 関数 $f(x)$ は t を用いて

$$\begin{aligned}\sin^3 x + \cos^3 x - 3 \sin x \cos x &= -\frac{1}{2} t (t^2 - 3) - \frac{3}{2} (t^2 - 1) \\ &= -\frac{1}{2} (t^3 + 3t^2 - 3t - 3)\end{aligned}$$

と表せる。ここで, 三角関数の合成公式より

$$\begin{aligned}t &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

と変形できるため, t のとりうる値の範囲は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ である。以下, 関数 $g(t)$ を

$$g(t) = -\frac{1}{2} (t^3 + 3t^2 - 3t - 3)$$

とおくと, $f(x)$ の最大値, 最小値は $g(t)$ の $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ における最大値, 最小値と一致するから, $g(t)$ の増減を調べることにする。関数 $g(t)$ の導関数 $g'(t)$ を計算して整理すると

$$\begin{aligned}g'(t) &= -\frac{1}{2} (3t^2 + 6t - 3) \\ &= -\frac{3}{2} (t^2 + 2t - 1) \\ &= -\frac{3}{2} \{ t - (-1 + \sqrt{2}) \} \{ t - (-1 - \sqrt{2}) \}\end{aligned}$$

となるから, 増減表は以下のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$g(-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$g(-1+\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$

よって, 関数 $g(t)$ は $t = -1 + \sqrt{2}$ のとき最大となり, ここで $g(t)$ を $g'(t)$ で割ると

$$g(t) = -\frac{1}{2} (t^2 + 2t - 1)(t + 1) + 2t + 1$$

と変形できることから, 最大値は

$$\begin{aligned}g(-1+\sqrt{2}) &= -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (-1+\sqrt{2}+1) + 2(-1+\sqrt{2}) + 1 \\ &= -1+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。また, $t = -\sqrt{2}$ または $t = \sqrt{2}$ のとき最小となるが, 各値を代入して比較すると

$$\begin{aligned}g(-\sqrt{2}) &= \frac{-3-\sqrt{2}}{2}, g(\sqrt{2}) = \frac{-3+\sqrt{2}}{2} \\ \therefore g(-\sqrt{2}) &< g(\sqrt{2})\end{aligned}$$

となるため, 最小値は

$$g(-\sqrt{2}) = \frac{-3-\sqrt{2}}{2}$$

であることがわかる。

【3】

[解答]

$$f(x) = 5 - 10(e-1)e^{-x}$$

[解説]

定積分 $\int_0^1 e^t f(t) dt$ の値を A とおくと、与えられた等式より、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 + 2 \int_0^1 e^{t-x} f(t) dt \\ &= 5 + 2e^{-x} \int_0^1 e^t f(t) dt \\ &= 5 + 2Ae^{-x} \end{aligned}$$

と表せるから、定積分 $\int_0^1 e^t f(t) dt$ の値は

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^t f(t) dt &= \int_0^1 e^t (5 + 2Ae^{-t}) dt \\ &= \int_0^1 (5e^t + 2A) dt \\ &= [5e^t + 2At]_0^1 \\ &= 2A + 5e - 5 \end{aligned}$$

とも表せる。したがって、 A の値は

$$\begin{aligned} A &= 2A + 5e - 5 \\ \therefore A &= -5(e-1) \end{aligned}$$

と求まるから、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 + 2Ae^{-x} \\ &= 5 - 10(e-1)e^{-x} \end{aligned}$$

と表せることがわかる。

【4】

〔解答〕

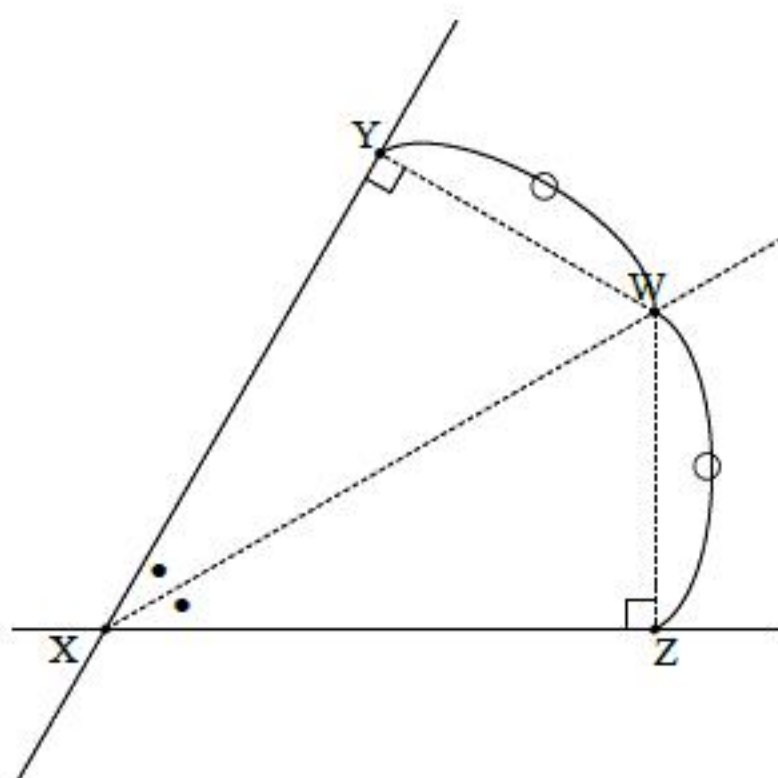
ひし形

〔解説〕

一般に、1点Xで交わる2直線とある点Wについて、点Wから各直線に下ろした垂線の足をそれぞれ点Y、Zとおくと、直角三角形の合同条件より

$$\text{点 } W \text{ が } \angle YXZ \text{ の二等分線上に存在する} \Leftrightarrow WY = WZ$$

であることに注意する。



四角形ABCDの内部の任意の点Pについて

$$PE + PG = PF + PH \quad \dots \textcircled{1}$$

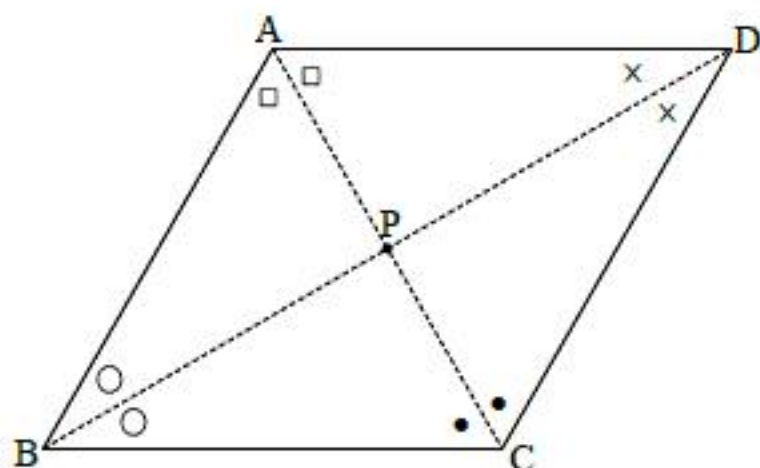
が成立するとき、特に点Pが $\angle ABC$ の二等分線上にある際に

$$PE = PF \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たすから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、関係式

$$PG = PH \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つことになる。よって、 $\textcircled{3}$ より点Pは $\angle CDA$ の二等分線上にもあることがわかる。これは $\angle ABC$ の二等分線上にある任意の点Pについて成立することであるから、 $\angle ABC$ の二等分線と $\angle CDA$ の二等分線は一致することがわかり、同様にして、 $\angle BCD$ の二等分線と $\angle DAB$ の二等分線は一致することもわかる。したがって、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDA$ はすべて合同な直角三角形となり、四角形ABCDはひし形であることが必要であることがわかる。



逆に、四角形ABCDがひし形であるとき、その内部の点Pに対して

$$PE + PG = EG, \quad PF + PH = FH$$

が成立し、ひし形は反転しても同じ図形になることから

$$EG = FH$$

となるため、十分条件も満たすことがわかる。

【5】

[解答]

$$|\alpha|=1$$

[解説]

一般に、複素数 z について

$$\text{複素数 } z \text{ が実数である} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

であることに注意すると、与えられた条件は

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{1+\alpha^2} &= \overline{\frac{\alpha}{1+\alpha^2}} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}^2} \\ &\Leftrightarrow \alpha(1+\bar{\alpha}^2) = \bar{\alpha}(1+\alpha^2) \quad (\because \alpha \text{ は純虚数でない}) \\ &\Leftrightarrow \alpha + \alpha\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} - \bar{\alpha}\alpha^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha})(\alpha\bar{\alpha} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha})(|\alpha|^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow |\alpha| = 1 \quad (\because \alpha \text{ は実数でない})\end{aligned}$$

と同値変形できる。

【6】

〔解答〕

$$a_n = 2^n + 1$$

〔解説〕

ある実数 α, β が存在して、関係式

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たすとき、①を変形することで

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \\ a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) \end{cases}$$

となるから、この2式より数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)}{\beta - \alpha} \quad \dots \textcircled{2}$$

と求まる。

問題で与えられた漸化式について、対応する実数 α, β ($\alpha \leq \beta$) を求めると

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha\beta = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 2) \end{aligned}$$

となるから、これらと $a_1 = 3, a_2 = 5$ を②に代入することで、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2^n + 1$$

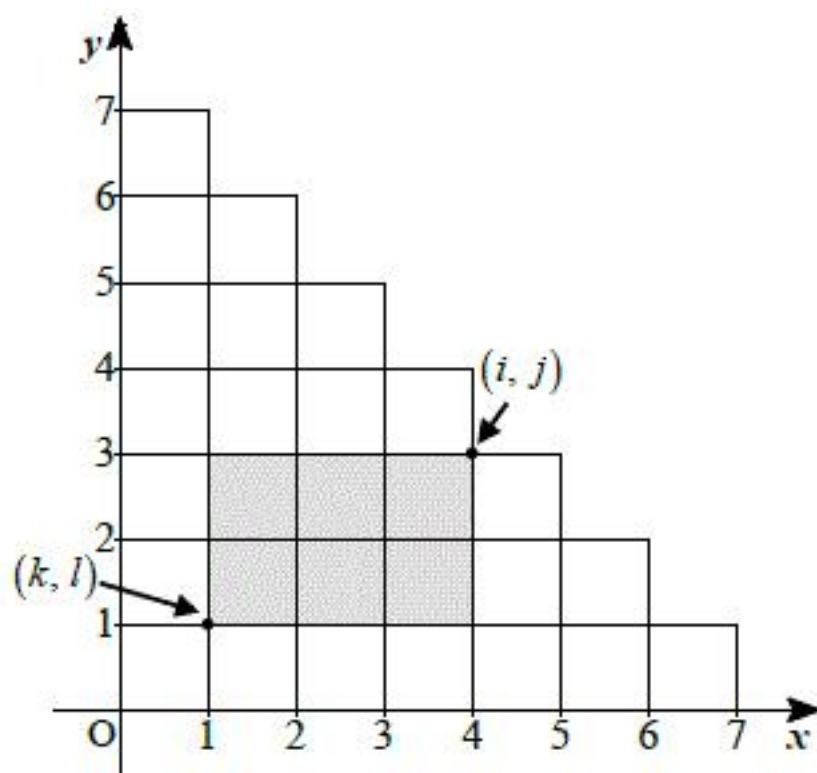
と求まる。

【 7 】

〔解答〕

210通り

〔解説〕



問題で与えられた図形を上図のように xy 座標平面上で対応させて考えることにする。この図形の線分を辺とする長方形に対し、上図のように図形上の2頂点 (i, j) , (k, l) が対応し、逆にこのような2頂点を定めれば長方形がただ1つに定まる。ここで、図形上の点 (i, j) ($1 \leq i, j, i+j \leq 8$) を固定したとき、図形上の点 (k, l) の選び方は

$$0 \leq k \leq i-1, 0 \leq l \leq j-1$$

を満たす整数 k, l の場合の数に一致するから

$$i \cdot j \text{ [通り]}$$

である。さらに、図形上の点 (i, j) について $i = m$ ($1 \leq m \leq 7$) と固定すると、 j の選び方は

$$1 \leq j \leq 8-m$$

を満たす整数を選ぶことと一致するから、この場合の長方形の総数は

$$\sum_{j=1}^{8-m} mj = \frac{m}{2}(8-m)(9-m)$$

である。したがって、求める長方形の総数は

$$\sum_{m=1}^7 \frac{m}{2}(8-m)(9-m) = \frac{1}{2}\{1 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \cdot 2\} = 210$$

となる。

【8】

〔解答〕

$$A \cap (\overline{B \cup C}) = \{x \mid x < -1 \text{ または } x = 1\}$$

〔解説〕

ド・モルガンの法則より

$$\begin{aligned} A \cap (\overline{B \cup C}) &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \end{aligned}$$

であるから、以下、部分集合 $A, \overline{B}, \overline{C}$ についてそれぞれ考える。

[1] 部分集合 A について

条件の不等式について、これを解くと

$$\begin{aligned} 2x-1 &\leq |x-2| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \text{ のとき, } 2x-1 \leq x-2 \\ x < 2 \text{ のとき, } 2x-1 \leq -(x-2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \text{ のとき, } x \leq -1 \\ x < 2 \text{ のとき, } x \leq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

となる。

[2] 部分集合 $\overline{B}$ について

条件の不等式について、これを解くと

$$\begin{aligned} x^2 - x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq 0, 1 \leq x \end{aligned}$$

となる。

[3] 部分集合 $\overline{C}$ について

条件の不等式について、これを解くと

$$\begin{aligned} x^2 + x &> 0 \\ \Leftrightarrow x(x+1) &> 0 \\ \Leftrightarrow x < -1, 0 < x \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、部分集合 $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ を表す条件は

$$\begin{aligned} &\text{「} x \leq 1 \text{」 かつ 「} x \leq 0 \text{ または } 1 \leq x \text{」 かつ 「} x < -1 \text{ または } 0 < x \text{」} \\ \Leftrightarrow &x < -1 \text{ または } x = 1 \end{aligned}$$

となる。

【 9 】

[解答]

$$x = -\frac{1}{2}\log 3$$

[解説]

関数 $f(x)$ について、 $t = \frac{5}{1+3e^{-2x}}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、方程式 $t = \frac{1}{2}$ を解くと

$$\begin{aligned} \frac{5}{1+3e^{-2x}} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow e^{-2x} &= 3 \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}\log 3 \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}\log 3$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$ をとることがわかる。

【10】

〔解答〕

$$x = \frac{3}{5}$$

〔解説〕

定積分 $\int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx$ の被積分関数について、 $0 < x < 1$ の範囲で $(1-x)^2 x^3 > 0$ であることから、

この定積分の値は正である。よって、実数 k の値について

$$\begin{aligned}\int_0^1 k(1-x)^2 x^3 dx &= 1 \\ \Leftrightarrow k \int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx &= 1 \\ \therefore k > 0 \quad \left(\because \int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx > 0 \right)\end{aligned}$$

であり、ここで関数 $f(x)$ の導関数を計算すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= k \left\{ (1-x)^2 \right\}' x^3 + k(1-x)^2 \left\{ x^3 \right\}' \\ &= -2k(1-x)x^3 + 3k(1-x)^2 x^2 \\ &= kx^2(1-x)(3-5x)\end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{3}{5}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	最大	↘	

したがって、 $f(x)$ が最大となる x の値は $x = \frac{3}{5}$ である。

【 1 1 】

[解答]

$$x=3, y=5$$

[解説]

連立方程式

$$\begin{cases} 15 \cdot 2^{2x} - 2^{2y} = -64 & \dots \textcircled{1} \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を解く。まず、②について真数条件より

$$x+1 > 0, y+3 > 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たさなければならない。次に③の条件のもと、②を変形すると

$$\begin{aligned} \log_2(x+1) - \log_2(y+3) &= -1 \\ \Leftrightarrow \log_2(y+3) &= \log_2(x+1) + \log_2 2 \\ \Leftrightarrow \log_2(y+3) &= \log_2 2(x+1) \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 1 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となるから、④を①式に代入して、変形すると

$$\begin{aligned} 15 \cdot 2^{2x} - 2^{2(2x-1)} &= -64 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (4^x)^2 - 15 \cdot 4^x - 64 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4^x + 4)(4^x - 64) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4^x = 64 \quad (\because 4^x > 0) \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

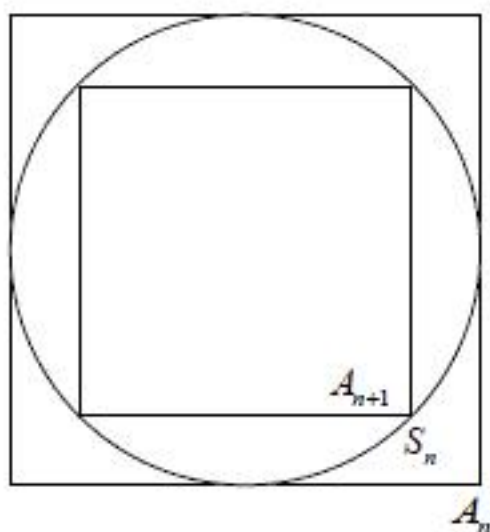
が得られる。したがって、④より $(x, y) = (3, 5)$ と求まり、これらは条件③を満たす。

【 1 2 】

[解答]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 2$$

[解説]



正方形 A_n の一辺の長さを a_n とおくと、正方形 A_{n+1} の対角線の長さと A_n の一辺の長さは一致するから、 A_{n+1} の一辺の長さは

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2}}$$

と表せる。よって、数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 1$ 、公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列であるから、その一般項は

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}$$

であることがわかる。したがって、無限等比級数についての公式より、求める極限値は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

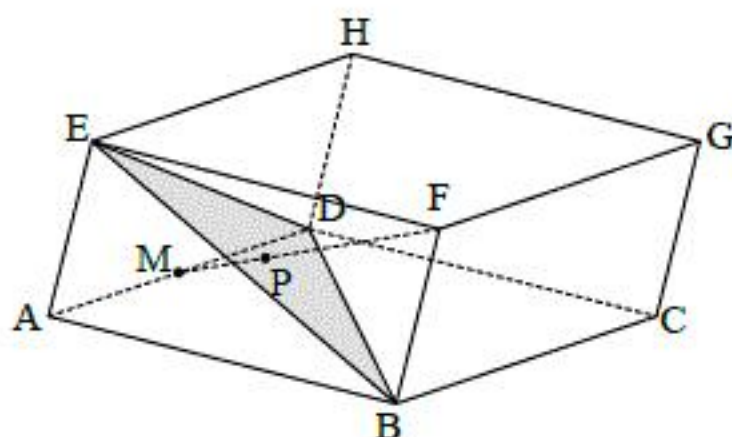
となる。

【13】

〔解答〕

点Pは線分MFを1:2に内分する

〔解説〕



3つのベクトル $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{z}$ を定めると、点Pは $\triangle BDE$ の重心であることから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$$

となる。また、点Mは線分ADの中点であり、点Fは上図のようであるから

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{x} + \vec{z}$$

となる。したがって、ベクトル $\overrightarrow{AP}$ は2つのベクトル $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AF}$ を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{y}\right) + \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{z}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} \end{aligned}$$

と表せるから、点Pは線分MF上にあり、それを1:2に内分することがわかる。

【 1 4 】

[解答]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\tan x)}{x - \tan x} = 1$$

[解説]

三角関数の和積公式より

$$\sin A - \sin B = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

であるから、これを用いると

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sin(\tan x)}{x - \tan x} &= \frac{2 \sin\left(\frac{x - \tan x}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \tan x}{2}\right)}{x - \tan x} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x - \tan x}{2}\right)}{\frac{x - \tan x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x + \tan x}{2}\right) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $t = \frac{x - \tan x}{2}$ とおくと、 $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ であるから、求める極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\tan x)}{x - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x - \tan x}{2}\right)}{\frac{x - \tan x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{x + \tan x}{2}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \cos\left(\frac{0 + \tan 0}{2}\right) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

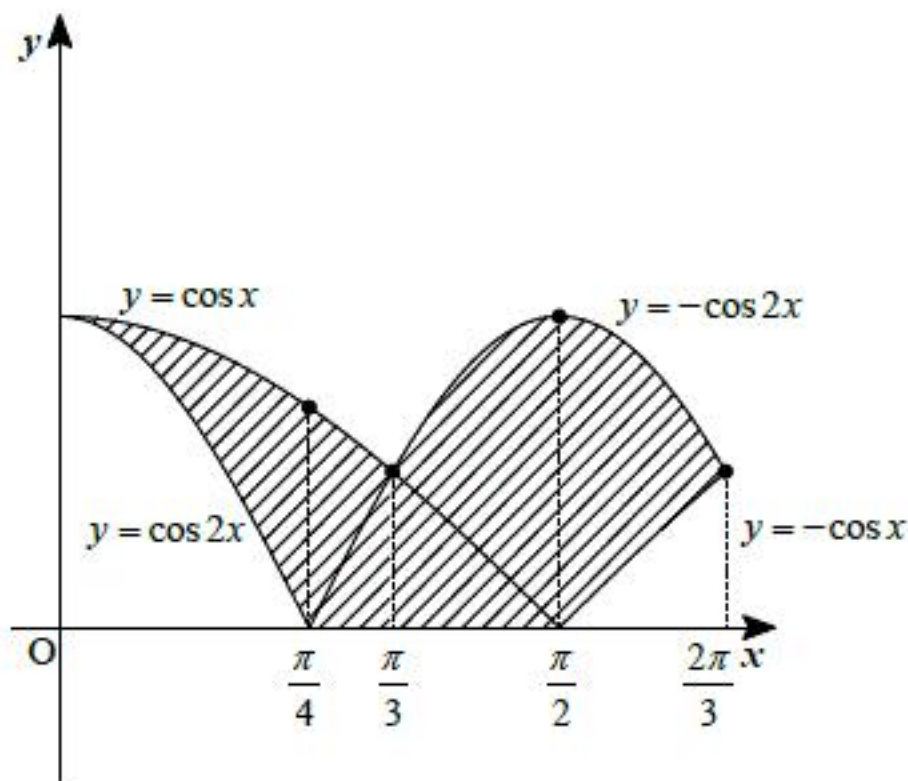
【 1 5 】

〔解答〕

$$\frac{\pi(\pi + 3\sqrt{3})}{8}$$

〔解説〕

曲線 $y = \cos x$ と曲線 $y = \cos 2x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体は、それらの曲線で囲まれた図形の $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返した図形を、 x 軸のまわりに1回転してできる立体と一致する。ここで、曲線 $y = \cos x$ と曲線 $y = \cos 2x$ とで囲まれた図形の $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返した図形を図示すると、以下の図の斜線部のようにになる。



上図において、 $y = \cos x$ と $y = -\cos 2x$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\cos x &= -\cos 2x \\ \Leftrightarrow \cos x &= -(2\cos^2 x - 1) \\ \Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= -1, \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{\pi}{3} \left(\because \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。したがって、求める立体の体積は

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx + \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-\cos 2x)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx - \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (-\cos x)^2 dx \\ &= \pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\cos 4x}{2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4x}{2} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \right) \\ &= \pi \left(\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} - \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \right) \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - 0 - 0 \right) + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16} \right) - \left(\frac{\pi}{8} + 0 - 0 - 0 \right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4} - 0 \right) \right\} \\ &= \frac{\pi(\pi + 3\sqrt{3})}{8} \end{aligned}$$

となる。