

【1】

〔解答〕

$$x = 0, 1, 3, 5, 6, 8$$

〔解説〕

$$\begin{aligned} |t| &= |x^3 - 9x^2 + 18x| \\ &= x|x-3||x-6| \end{aligned}$$

である。 $|t|$ の一の位が0となるとき、 $|t|$ は10の倍数であるから、 $x, |x-3|, |x-6|$ のうち少なくとも1つは2の倍数であり、同様に少なくとも1つは5の倍数である。ここで、 x と $|x-3|$ の偶奇は異なることから、いずれか一方は2の倍数である。したがって、 $x, |x-3|, |x-6|$ のうち少なくとも1つが5の倍数となるような x を求めればよい。 $0 \leq x \leq 9$ のもとで、

$$x \text{ が } 5 \text{ の倍数} \Leftrightarrow x = 0, 5$$

$$|x-3| \text{ が } 5 \text{ の倍数} \Leftrightarrow x = 3, 8$$

$$|x-6| \text{ が } 5 \text{ の倍数} \Leftrightarrow x = 1, 6$$

であるから、 $|t|$ の一の位が0となる x は、 $x = 0, 1, 3, 5, 6, 8$ である。

【2】

〔解答〕

-20

〔解説〕

三角関数の加法定理より、

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \sin(3\theta + 2\theta) \\ &= \sin 3\theta \cos 2\theta + \cos 3\theta \sin 2\theta\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、2倍角の公式および3倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 3\theta \cos 2\theta &= (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1 - 2\sin^2\theta) \\ &= (3t - 4t^3)(1 - 2t^2) \\ &= 8t^5 - 10t^3 + 3t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta \sin 2\theta &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\sin\theta\cos\theta) \\ &= 2\sin\theta(4\cos^2\theta - 3)\cos^2\theta \\ &= 2\sin\theta\{4(1 - \sin^2\theta) - 3\}(1 - \sin^2\theta) \\ &= 2t(-4t^2 + 1)(1 - t^2) \\ &= 8t^5 - 10t^3 + 2t\end{aligned}$$

と表せるから、

$$\sin 5\theta = (8t^5 - 10t^3 + 3t) + (8t^5 - 10t^3 + 2t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

となる。以上より、 t^3 の係数は-20である。

【3】

〔解答〕

$$x < 1 - \sqrt{7}, 0 < x < 2, 1 + \sqrt{7} < x$$

〔解説〕

$$|x^2 - 2x - 3| > 3$$

より、

$$x^2 - 2x - 3 < -3 \text{ または } 3 < x^2 - 2x - 3$$

が成り立つ。変形していくと、

$$x^2 - 2x - 3 < -3 \text{ または } 3 < x^2 - 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) < 0 \text{ または } 0 < x^2 - 2x - 6$$

$$\therefore x < 1 - \sqrt{7} \text{ または } 0 < x < 2 \text{ または } 1 + \sqrt{7}$$

となる。

【4】

[解答]

$$b^5 - 5b^3 + 5b$$

[解説]

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = b^2 - 2$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) = b(b^2 - 3)$$

であるから、

$$\begin{aligned} a^5 + \frac{1}{a^5} &= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) \\ &= (b^2 - 2) \cdot b(b^2 - 3) - b \\ &= b^5 - 5b^3 + 5b \end{aligned}$$

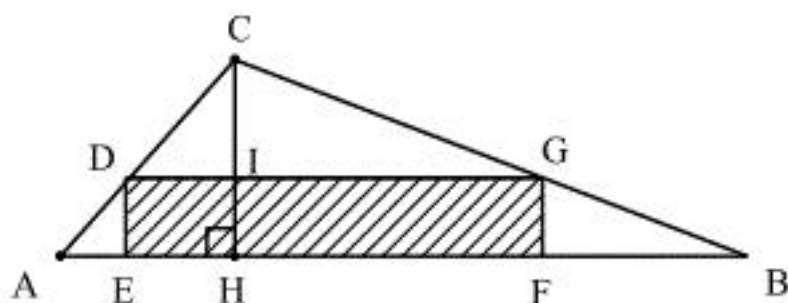
となる。

【5】

〔解答〕

315

〔解説〕



図のように D, E, F, G, H, I を定める。まず, $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると,

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{63^2 + 25^2 - 52^2}{2 \cdot 63 \cdot 25} = \frac{3}{5}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

と求まり, このとき

$$CH = AC \sin A = 20$$

となる。ここで, $DG = x (0 \leq x \leq 63)$ とおくと,

$$CI : CH = DG : AB = x : 63$$

$$\therefore DE = CH - CI = CH \left(1 - \frac{CI}{CH}\right) = 20 \left(1 - \frac{x}{63}\right)$$

である。したがって, 長方形の面積を S とすると,

$$S = DG \cdot DE$$

$$= x \cdot 20 \left(1 - \frac{x}{63}\right)$$

$$= \frac{20}{63} x (63 - x)$$

$$= -\frac{20}{63} \left(x - \frac{63}{2}\right)^2 + 315$$

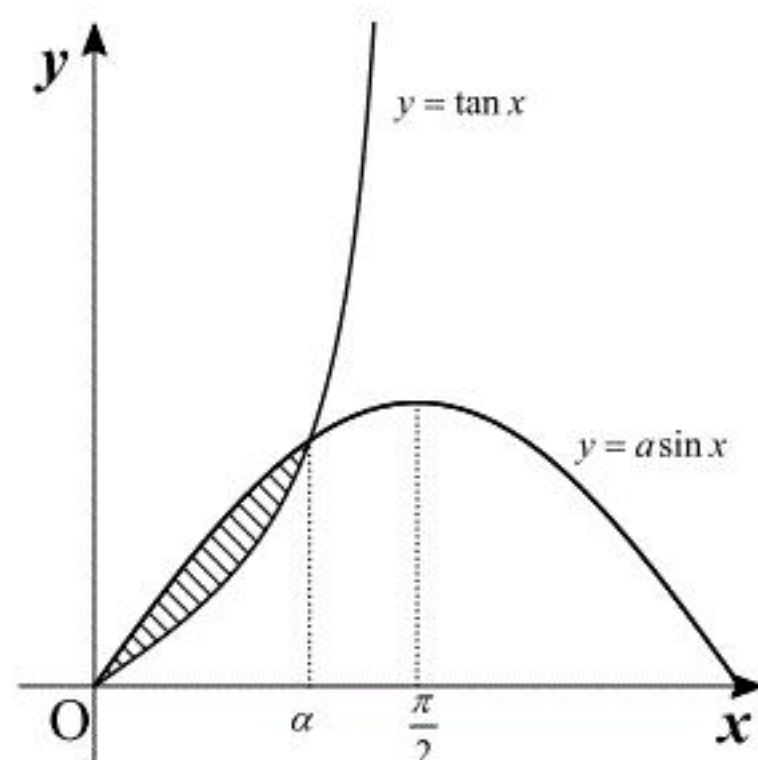
となることから, 求める S の最大値は 315 である。

【6】

〔解答〕

$$a-1-\log a$$

〔解説〕



$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ において,

$$a \sin x = \tan x$$

$$\Leftrightarrow a \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow a \sin x \left(\cos x - \frac{1}{a} \right) = 0$$

となる。 $a > 1$ より、 $0 < \frac{1}{a} < 1$ であるから、 $\cos x = \frac{1}{a}$ を満たす x が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つ

存在する。この x を α とおくと、 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $x=0, \alpha$ である。ここで、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\alpha} (a \sin x - \tan x) dx \\ &= \int_0^{\alpha} \left\{ a \sin x + \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right\} dx \\ &= \left[-a \cos x + \log |\cos x| \right]_0^{\alpha} \\ &= -a \cos \alpha + a + \log |\cos \alpha| \\ &= a - 1 + \log \left(\frac{1}{a} \right) \left(\because \cos \alpha = \frac{1}{a} \right) \\ &= a - 1 - \log a \end{aligned}$$

と求まる。

【7】

〔解答〕

$$a_{11} = \frac{1}{1025}$$

〔解説〕

与えられた漸化式より、 $a_{n+1} = 0$ となるのは $a_n = 0$ となる場合に限られる。いま、 $a_1 = \frac{1}{2} \neq 0$ であるから、帰納的に任意の自然数 n について $a_n \neq 0$ とわかる。したがって、与えられた漸化式の逆数を考えると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{2-a_n}{a_n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{2}{a_n} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - 1 &= 2 \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$ は初項 $\frac{1}{a_1} - 1 = 1$ 、公比 2 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} - 1 &= 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{2^{n-1} + 1}\end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$a_{11} = \frac{1}{2^{10} + 1} = \frac{1}{1025}$$

である。

【8】

〔解答〕

$$\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}AB^2$$

〔解説〕

点 A, B の座標を $A(0, t)$, $B(s, 0)$ とする。 $C(p, q)$ は線分 AB を $a:b$ に外分する点であるから,

$$p = \frac{-b \cdot 0 + as}{a-b} = \frac{as}{a-b}$$
$$q = \frac{-bt + a \cdot 0}{a-b} = -\frac{bt}{a-b}$$

と表せる。したがって,

$$\begin{aligned}b^2p^2 + a^2q^2 &= b^2 \cdot \frac{a^2s^2}{(a-b)^2} + a^2 \cdot \frac{b^2t^2}{(a-b)^2} \\&= \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}(s^2 + t^2) \\&= \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}AB^2\end{aligned}$$

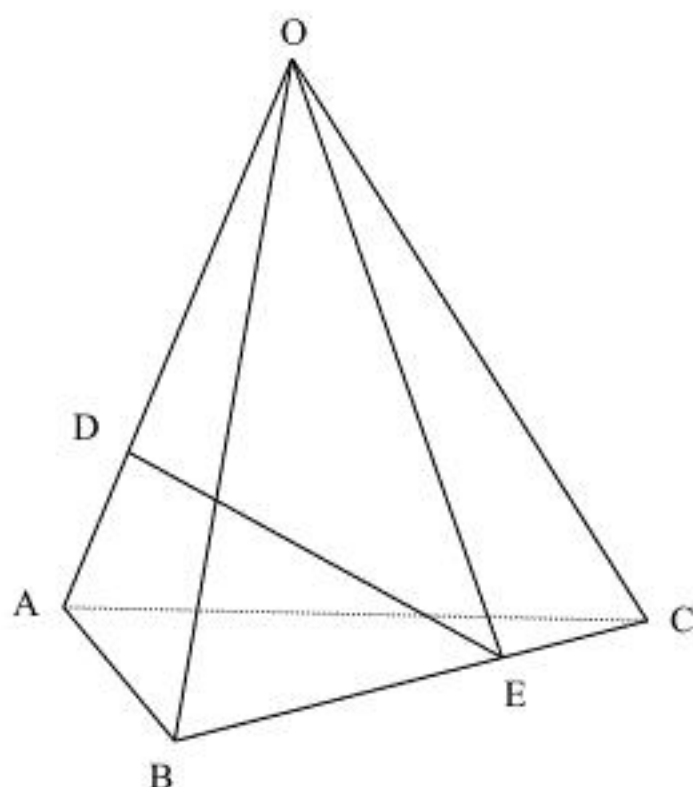
と求まる。

【9】

〔解答〕

$$\frac{2\sqrt{51}}{15}$$

〔解説〕



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。このとき,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

である。また,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2$$

が成り立つ。したがって, $\triangle ODE$ の面積は,

$$\begin{aligned} \triangle ODE &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OD}|^2 |\overrightarrow{OE}|^2 - (\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{2}{3}\vec{a} \right|^2 \cdot \left| \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c} \right|^2 - \left(\frac{4}{15}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{6}{15}\vec{a} \cdot \vec{c} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{25} \cdot 4 + \frac{12}{25} \cdot 2 + \frac{9}{25} \cdot 4 \right) - \left(\frac{4}{15} \cdot 2 + \frac{6}{15} \cdot 2 \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16}{9} \cdot \frac{76}{25} - \frac{16}{9}} \\ &= \frac{2\sqrt{51}}{15} \end{aligned}$$

と求まる。

【10】

〔解答〕

問題不備のため、省略

【11】

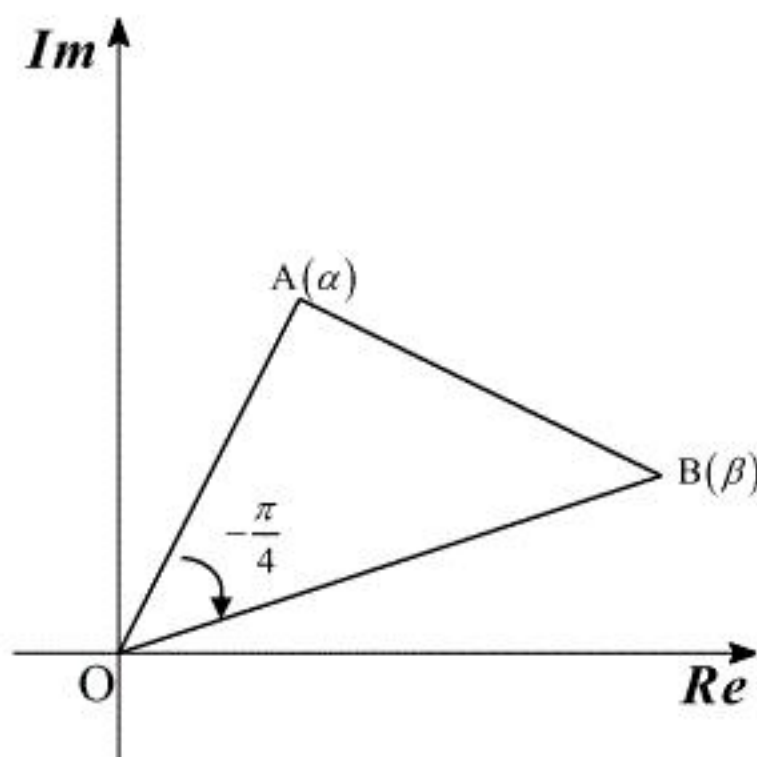
〔解答〕

$\angle OAB = \frac{\pi}{2}$, $OA = AB$ の直角二等辺三角形

〔解説〕

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \alpha \\ &= \sqrt{2} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} \alpha\end{aligned}$$

と表せるから、点 B は、原点 O を中心に点 A を $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍とした位置にある。



$OA : OB = 1 : \sqrt{2}$ であり、 $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ であるから、 $\triangle OAB$ は $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$, $OA = AB$ の直角二等辺三角形となる。

【12】

〔解答〕

-2

〔解説〕

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \tan 2x} - \sqrt{1 + \tan 2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \tan 2x) - (1 + \tan 2x)}{x(\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \tan 2x}{x(\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{-4}{(\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x}) \cos 2x} \\&= 1 \cdot \frac{-4}{(1+1) \cdot 1} \\&= -2\end{aligned}$$

と求まる。

【13】

[解答]

$$2(\log 2)^3 - 6(\log 2)^2 + 12\log 2 - 6$$

[解説]

C を積分定数とすると、部分積分を行うことで、

$$\begin{aligned}\int (\log x)^3 dx &= x(\log x)^3 - \int x \cdot 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^3 - 3 \int (\log x)^2 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

となるから、

$$\int (\log x)^3 dx = x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x \log x - 6x + C$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\log x)^3 dx &= \left[x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x \log x - 6x \right]_1^2 \\ &= 2(\log 2)^3 - 6(\log 2)^2 + 12\log 2 - 6\end{aligned}$$

と求まる。

【14】

〔解答〕

ク

〔解説〕

(A)は偽である。反例は、 $a_n = 2n$, $b_n = n$ であり、このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

であるが、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

となる。また、(B)も偽である。反例は、 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ であり、このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

より、 $\alpha = \beta = 0$ となるが、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

となる。さらに、(C)も偽である。反例は、 $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$ であり、このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

より、数列 $\{a_n b_n\}$ は収束するが、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

より、数列 $\{a_n\}$ は発散する。以上より、答はクである。

【15】

〔解答〕

-0.9

〔解説〕

x, y の平均値 $\bar{x}, \bar{y}$ はそれぞれ,

$$\bar{x} = \frac{8+4+2+6+10}{5} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{4+5+6+3+2}{5} = 4$$

と求まり, 下の表が書ける。

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
8	4	2	0	4	0	0
4	5	-2	1	4	1	-2
2	6	-4	2	16	4	-8
6	3	0	-1	0	1	0
10	2	4	-2	16	4	-8

したがって, x, y の標準偏差 s_x, s_y はそれぞれ,

$$s_x = \sqrt{\frac{4+4+16+0+16}{5}} = 2\sqrt{2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{0+1+4+1+4}{5}} = \sqrt{2}$$

となり, 共分散 s_{xy} は,

$$s_{xy} = \frac{0+(-2)+(-8)+0+(-8)}{5} = -\frac{18}{5}$$

となるから, 相関係数 r は,

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{-\frac{18}{5}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -0.9$$

である。