

【1】

〔解答〕

(1)	$\boxed{\gamma}$
	$\frac{a+b}{2}$
(2)	$\boxed{\gamma}$
	$\frac{\alpha}{8}(b-a)^3$

〔解説〕

(1)

点Cのx座標をcとおく。放物線 $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ について、

$$y' = 2\alpha x + \beta$$

であるから、この放物線上の点Cでの接線の傾きは $2\alpha c + \beta$ である。一方、点A, Bの座標はそ

れぞれ $(a, \alpha a^2 + \beta a + \gamma), (b, \alpha b^2 + \beta b + \gamma)$ であるから、直線ABの傾きは、

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha b^2 + \beta b + \gamma) - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma)}{b - a} &= \frac{\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a)}{b - a} \\ &= \frac{\alpha(b + a)(b - a) + \beta(b - a)}{b - a} \\ &= \alpha(a + b) + \beta \quad (\because b \neq a) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} 2\alpha c + \beta &= \alpha(a + b) + \beta \\ \Leftrightarrow c &= \frac{a + b}{2} \quad (\because \alpha \neq 0) \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)で直線ABの傾きを求めたときと同様の式変形を行うと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} b \\ \alpha b^2 + \beta b + \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ \alpha a^2 + \beta a + \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b - a \\ (b - a)\{\alpha(a + b) + \beta\} \end{pmatrix} \\ &= (b - a) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(a + b) + \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、同様にして $\overrightarrow{AC} = (c - a) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(a + c) + \beta \end{pmatrix}$ である。(1)の結果より $c = \frac{a + b}{2}$ で、 $a < c < b$ で

あり、また $\alpha > 0$ であることに注意すれば、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |(b - a)(c - a)[1 \cdot \{\alpha(a + c) + \beta\} - \{\alpha(a + b) + \beta\} \cdot 1]| \\ &= \frac{1}{2} |(b - a)(c - a) \cdot \alpha(c - b)| \\ &= \frac{1}{2} \alpha (b - a)(c - a)(b - c) \\ &= \frac{1}{2} \alpha (b - a) \left(\frac{a + b}{2} - a \right) \left(b - \frac{a + b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha (b - a) \cdot \frac{b - a}{2} \cdot \frac{b - a}{2} \\ &= \frac{\alpha}{8} (b - a)^3 \end{aligned}$$

となる。

【2】

〔解答〕

$x=5$ のとき極小値 $\log 38$

〔解説〕

$f(x) = \log(x^3 + x - 16) - \log(2x - 7)$ とおく。真数条件より、

$$x^3 + x - 16 > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2x - 7 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。まず①について、 $g(x) = x^3 + x - 16$ とおくと、

$$g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

であるから $g(x)$ は単調増加関数である。これと $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ より、 $g(x) = 0$ を

満たす実数 x がただ1つ存在し、それを α とおくと①の解は $x > \alpha$ である。一方、②の解は

$x > \frac{7}{2}$ であり、

$$g\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{343}{8} + \frac{7}{2} - 16 = \frac{243}{8} > 0$$

より $\alpha < \frac{7}{2}$ となるから結局①と②の共通解は $x > \frac{7}{2}$ であり、これが $f(x)$ の定義域となる。ま

た、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 16} - \frac{2}{2x - 7} \\ &= \frac{(3x^2 + 1)(2x - 7) - 2(x^3 + x - 16)}{(x^3 + x - 16)(2x - 7)} \\ &= \frac{4x^3 - 21x^2 + 25}{(x^3 + x - 16)(2x - 7)} \\ &= \frac{(x + 1)(4x - 5)(x - 5)}{(x^3 + x - 16)(2x - 7)} \end{aligned}$$

であるから、 $x > \frac{7}{2}$ における関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\left(\frac{7}{2}\right)$	$\dots$	5	$\dots$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ は $x=5$ で極小値 $f(5) = \log 114 - \log 3 = \log 38$ をとる。

【3】

〔解答〕

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{50}$$

〔解説〕

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{6^{2i} + 6^i 6^j} \right) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{6^i (6^i + 6^j)} \right\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、①の i と j を入れ替えると、

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{6^{2j} + 6^j 6^i} \right) = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{6^j (6^j + 6^i)} \right\} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。よって、①と②の辺々を足し合わせると、

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{6^i (6^i + 6^j)} \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{6^j (6^i + 6^j)} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{6^i (6^i + 6^j)} + \frac{1}{6^j (6^i + 6^j)} \right\} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{6^i + 6^j}{6^i 6^j (6^i + 6^j)} \right\} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{6} \right)^i \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{6} \right)^j \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{6} \right)^i \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n}{1 - \frac{1}{6}} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{25} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{50} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\}^2$$

である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = 0$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{50}$ である。

【4】

〔解答〕

(1)	ア			
	0, 1			
(2)	イ	ウ	エ	オ
	－	$2t$	t^2	$-t^2+2t$
(3)	カ			
	$\frac{\sqrt{2}}{15}\pi$			

〔解説〕

(1)

$x \geq 0$ における直線 $l: y = x$ と曲線 $C: y = 2\sqrt{x} - x$ の共有点の x 座標は、これら 2 つの方程式から y を消去して、

$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{x} - x \\ \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= 0, 1 \\ \therefore x &= 0, 1 \end{aligned}$$

である。

(2)

直線 $l: y = x$ と直交する直線 m の傾きは -1 である。また、直線 m は点 (t, t) を通るので、その方程式は、

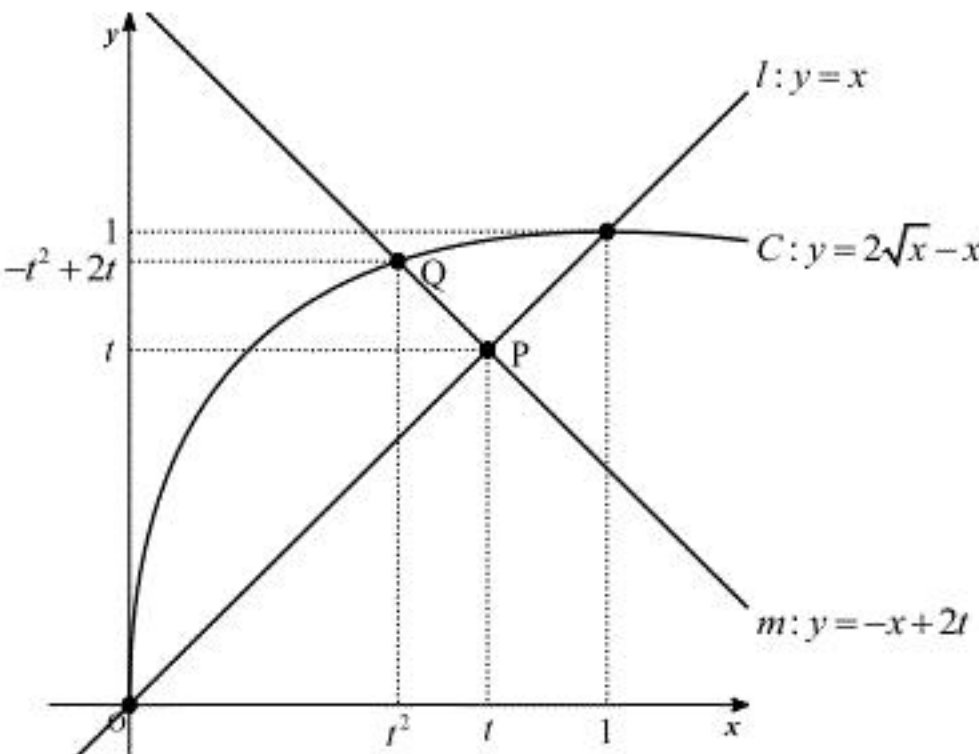
$$\begin{aligned} y - t &= -(x - t) \\ \therefore y &= -x + 2t \end{aligned}$$

となる。よって、直線 $m: y = -x + 2t$ と曲線 $C: y = 2\sqrt{x} - x$ の共有点の x 座標は、これら 2 つの方程式から y を消去して、

$$\begin{aligned} -x + 2t &= 2\sqrt{x} - x \\ \therefore x &= t^2 \end{aligned}$$

となる。よって、直線 m の式から、求める共有点の座標は $(t^2, -t^2 + 2t)$ となる。

(3)



上図のように、直線 l と直線 m の交点を $P(t, t)$ 、曲線 C と直線 m の交点を $Q(t^2, -t^2 + 2t)$ とおく。点 P が直線 l 上を $(0, 0)$ から $(1, 1)$ まで動くとき、線分 OP の長さを a とおくと、

$$\begin{aligned} 0 \leq a &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \\ \Leftrightarrow 0 \leq a &\leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

となるので、求める回転体の体積 V は、

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} PQ^2 da$$

となる。ここで、

$$a = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}t$$

であり、 $\frac{da}{dt} = \sqrt{2}$ となる。また、積分範囲は次のように対応する。

a	0	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
t	0	$\rightarrow$	1

ここで、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (t^2 - t)^2 + (-t^2 + 2t - t)^2 \\ &= 2(t^2 - t)^2 \\ &= 2(t^4 - 2t^3 + t^2) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} PQ^2 da \\ &= \pi \int_0^1 2(t^4 - 2t^3 + t^2) \cdot \sqrt{2} dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi \cdot \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= 2\sqrt{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{30} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{15}\pi \end{aligned}$$

である。

【5】

【解答】

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	
	$\frac{2cd}{c+d}$	
(2)	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$
	$\frac{b}{b+c+d}$	$\frac{2bcd}{b+c+d}$

【解説】

(1)

試合を行うとき、袋の中にあるいずれの球も取り出される確率は同様に確からしい。まず、

A と B の予選試合で、A が勝つ確率は $\frac{a}{a+b}$ である。

次に、決勝での A の試合相手に応じて場合分けを行う。

[1] 決勝での A の試合相手が C であるとき

まず、C と D の予選試合において C が勝つ確率は $\frac{c}{c+d}$ である。そして、決勝で A が勝つ

確率は $\frac{a}{c+a}$ である。よって[1]の場合に A がトーナメントで優勝する確率は

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d} \cdot \frac{a}{c+a} = \frac{a^2c}{(a+b)(a+c)(c+d)}$$

である。

[2] 決勝での A の試合相手が D であるとき

まず、C と D の予選試合において D が勝つ確率は $\frac{d}{c+d}$ である。そして、決勝で A が勝つ

確率は $\frac{a}{d+a}$ である。よって[2]の場合に A がトーナメントで優勝する確率は

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d} \cdot \frac{a}{d+a} = \frac{a^2d}{(a+b)(a+d)(c+d)}$$

である。

以上[1], [2]より、A が予選で B と対戦する場合、A がトーナメントで優勝する確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{a^2c}{(a+b)(a+c)(c+d)} + \frac{a^2d}{(a+b)(a+d)(c+d)} \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(c+d)} \left(\frac{c}{a+c} + \frac{d}{a+d} \right) \\ &= \frac{a^2 \{ c(a+d) + d(a+c) \}}{(a+b)(c+d)(a+c)(a+d)} \\ &= \frac{a^2 \{ a(c+d) + 2cd \}}{(a+b)(c+d)(a+c)(a+d)} \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2cd}{c+d} \right) \qquad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

である。

(2)

まず、予選で A が B と対戦する確率は $\frac{b}{b+c+d}$ である。以下では、A がこのトーナメントで

優勝する確率を、予選での A の対戦相手に応じて場合分けして考える。

[1] 予選で A と B が対戦する場合

予選で A が B と対戦する確率は、 $\frac{b}{b+c+d}$ である。また、このとき、A がトーナメントで

優勝する確率は(1)の①より、 $\frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2cd}{c+d} \right)$ である。よって、(2)のルール

のもとで、A が予選で B と対戦して、A がトーナメントで優勝する確率は、

$$\frac{b}{b+c+d} \cdot \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2cd}{c+d} \right)$$

である。

[2] 予選で A が C と対戦する場合

予選で A が C と対戦する確率は、 $\frac{c}{b+c+d}$ である。ここで、(1)の①の確率は、予選で A と

B、C と D がそれぞれ対戦して A が優勝する確率であり、 a, b, c, d はそれぞれ A, B, C, D の持っている玉の数であることに注意すると、予選で A と C、B と D がそれぞれ対戦して A が優勝する確率は、①の b を c に、 c を b に置き換えたもの、すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{(a+c)(a+b)(a+d)} \left(a + \frac{2bd}{b+d} \right) \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2bd}{b+d} \right) \end{aligned}$$

である。よって、(2)のルールのもとで、A が予選で C と対戦して、A がトーナメントで優勝する確率は、

$$\frac{c}{b+c+d} \cdot \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2bd}{b+d} \right)$$

である。

[3] 予選で A が D と対戦する場合

予選で A が D と対戦する確率は、 $\frac{d}{b+c+d}$ である。また、[2]と同様に考えると、予選で A

と D、C と B がそれぞれ対戦して A が優勝する確率は、①の b を d に、 d を b に置き換えたもの、すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{(a+d)(a+c)(a+b)} \left(a + \frac{2cb}{c+b} \right) \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2bc}{b+c} \right) \end{aligned}$$

である。よって、(2)のルールのもとで、A が予選で D と対戦して、A がトーナメントで優勝する確率は、

$$\frac{d}{b+c+d} \cdot \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2bc}{b+c} \right)$$

である。

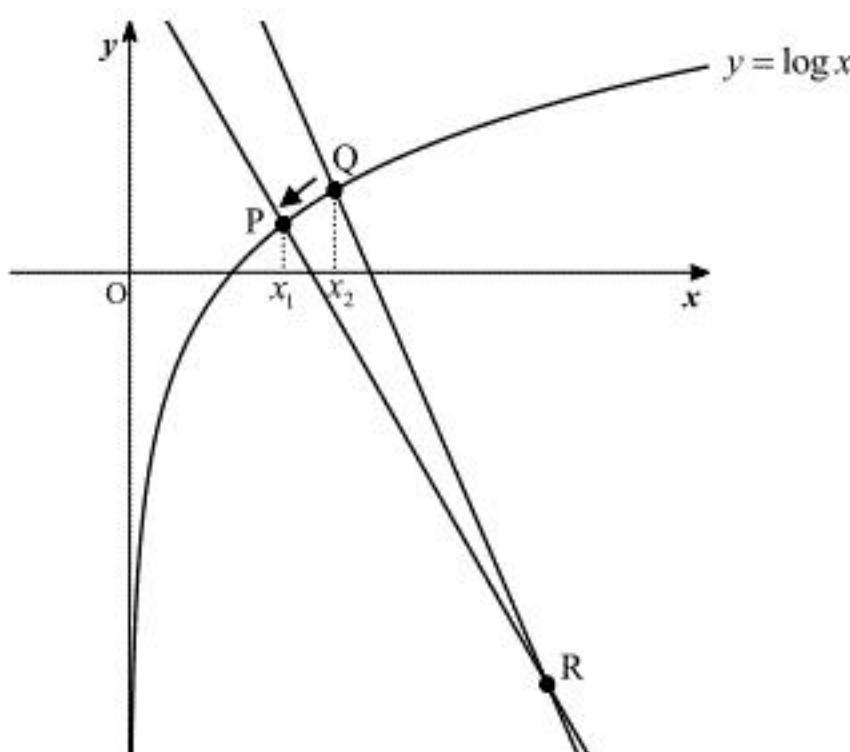
以上[1], [2], [3]より、(2)のルールのもとで、A がトーナメントで優勝する確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{b}{b+c+d} \cdot \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2cd}{c+d} \right) + \frac{c}{b+c+d} \cdot \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2bd}{b+d} \right) \\ &+ \frac{d}{b+c+d} \cdot \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left(a + \frac{2bc}{b+c} \right) \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)(b+c+d)} \left\{ b \left(a + \frac{2cd}{c+d} \right) + c \left(a + \frac{2bd}{b+d} \right) + d \left(a + \frac{2bc}{b+c} \right) \right\} \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)(b+c+d)} \left\{ a(b+c+d) + 2bcd \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{b+c} \right) \right\} \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)(a+d)} \left\{ a + \frac{2bcd}{b+c+d} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+b} \right) \right\} \end{aligned}$$

である。

【6】

(1)



$f(x) = \log x$ とおくと、 $f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)} = -x$ である。よって、点 $P(x_1, \log x_1)$ における

$y = f(x)$ の法線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \log x_1 &= -x_1(x - x_1) \\ \Leftrightarrow y &= -x_1x + (x_1^2 + \log x_1) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。同様に、点 $P(x_2, \log x_2)$ における $y = f(x)$ の法線の方程式は、

$$y = -x_2x + (x_2^2 + \log x_2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって点 R の x 座標は、①、②から y を消去すると、

$$\begin{aligned} -x_1x + (x_1^2 + \log x_1) &= -x_2x + (x_2^2 + \log x_2) \\ \Leftrightarrow (x_2 - x_1)x &= x_2^2 - x_1^2 + (\log x_2 - \log x_1) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + (\log x_2 - \log x_1)}{x_2 - x_1} \quad (\because x_1 \neq x_2) \\ \therefore x &= x_2 + x_1 + \frac{\log x_2 - \log x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\log x_2 - \log x_1}{x_2 - x_1} &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= f'(x_1) \\ &= \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

であるから、点 S の x 座標 X は、

$$\begin{aligned} X &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left(x_2 + x_1 + \frac{\log x_2 - \log x_1}{x_2 - x_1} \right) \\ &= 2x_1 + \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

となる。また、点 S は法線①上にあるから、

$$\begin{aligned} Y &= -x_1X + (x_1^2 + \log x_1) \\ &= -x_1 \left(2x_1 + \frac{1}{x_1} \right) + (x_1^2 + \log x_1) \\ &= -x_1^2 - 1 + \log x_1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (X, Y) = \left(2x_1 + \frac{1}{x_1}, -x_1^2 - 1 + \log x_1 \right)$$

(2)

点 P が $y = f(x)$ 上を動くとき、点 P と点 S との距離を $d(x_1)$ とおく。このとき、(1)の結果より、

$$\begin{aligned} \{d(x_1)\}^2 &= (X - x_1)^2 + (Y - \log x_1)^2 \\ &= \left(2x_1 + \frac{1}{x_1} - x_1 \right)^2 + (-x_1^2 - 1 + \log x_1 - \log x_1)^2 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right)^2 + (-x_1^2 - 1)^2 \\ &= \left(\frac{1}{x_1^2} + 1 \right) (x_1^2 + 1)^2 \\ &= \frac{(x_1^2 + 1)^3}{x_1^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x_1^2 = t$ とおくと、 $\{d(x_1)\}^2$ は t の関数 $g(t) = \frac{(t+1)^3}{t}$ と表すことができる。 x_1 は $x_1 > 0$ の範囲を動くので、 $t > 0$ であり、

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{3(t+1)^2 \cdot t - (t+1)^3 \cdot 1}{t^2} \\ &= \frac{(t+1)^2 \{3t - (t+1)\}}{t^2} \\ &= \frac{(t+1)^2 (2t-1)}{t^2} \end{aligned}$$

であるから、 $t > 0$ における $g(t)$ の増減は以下になる。

t	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$			極小	

よって $g(t)$ は、 $t = \frac{1}{2}$ のときに最小となる。このとき、 $x_1 = \sqrt{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから、 $\{d(x_1)\}^2$ は

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに最小となる。 $d(x_1) > 0$ より、 $\{d(x_1)\}^2$ が最小の時に $d(x_1)$ も最小となるので、

結局 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに点 P と点 S との距離が最小となる。このとき、

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \\ Y &= -\frac{1}{2} - 1 + \log \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

となるので、求める点 S の座標は、 $\left(2\sqrt{2}, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 2 \right)$ である。

$$(\text{答}) \quad S \left(2\sqrt{2}, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 2 \right)$$