

【 1 】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$\frac{4017}{2} \leq m \leq 2009$	40	2014	1

〔解説〕

b を除いて y のデータを小さい順に並べると、

$$2004, 2005, 2008, 2010, 2016 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。以下、 b の値の範囲によって場合分けをする。

[1] $2009 \leq b < 2010$ のとき

①より、中央値 m は

$$m = \frac{1}{2}(2008 + b)$$

であるから、 $\frac{4017}{2} \leq m < 2009$ となる。

[2] $2010 \leq b \leq 2018$ のとき

①より、中央値 m は

$$m = \frac{1}{2}(2008 + 2010) = 2009$$

となる。

以上[1],[2]より y の中央値 m のとりうる値の範囲は

$$\frac{4017}{2} \leq m \leq 2009$$

である。また、データを xy 平面上の点として考えると、4 点

$$(20, 2004), (50, 2010), (25, 2005), (80, 2016)$$

はすべて、直線 $y = \frac{1}{5}x + 2000$ 上にある。2 点 $(a, 2008), (70, b)$ がこの直線上にあるとき、 x と

y の相関係数は最大となるから、そのような a, b は、

$$\begin{cases} 2008 = \frac{1}{5}a + 2000 \\ b = \frac{1}{5} \cdot 70 + 2000 \end{cases}$$

$$\therefore a = 40, b = 2014$$

である。このとき、6 点すべてが同一直線上にあり、正の相関を示しているから相関係数は 1 である。

【2】

〔解答〕

(1)	ア			
	$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$			
(2)	イ	ウ	エ	オ
	$\frac{1}{9}$	$\frac{31}{216}$	$\frac{161}{1296}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4}$	$\frac{265}{36}$

〔解説〕

(1)

サイコロの各目が出る確率は同様に確からしい。6番のマスからスタートするとき、1回サイコロを振ってゴールする確率は6の目が出る確率で $\frac{1}{6}$ である。そして、 $\frac{5}{6}$ の確率で1～5のうちのいずれかのマスに移動する。また、1～5番のいずれかのマスにいるとき、1回サイコロを振ってゴールする確率は、そのマスと同じ数字の目が出る確率で $\frac{1}{6}$ である。そして、 $\frac{5}{6}$ の確率で1～5番のうちいずれかのマスに移動する。以上より、6番のマスからスタートするとき、何回目の移動においてもゴールする確率は $\frac{1}{6}$ であり、ゴールしない確率は $\frac{5}{6}$ である。 $n \geq 2$ のとき、 $n-1$ 回までゴールせずに n 回目でゴールする確率を求めればよいから、

$$P_n = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1}$$

である。ここで、 $n=1$ のとき $P_1 = \frac{1}{6}$ であるから、すべての正整数 n について、

$$P_n = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1}$$

である。

(2)

$Q_1 = 0$ であるから、これは考慮しなくてよい。9番のマスからスタートするとき、2回目の移動で初めてゴールに到達するのは、1回目で3, 4, 5, 6のうちいずれかの目が出て、2回目で現在いるマスの番号と出たサイコロの目の数字が一致した場合であるから、この確率は

$$Q_2 = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

である。また、3回目の移動で初めてゴールに到達するのは、2回目の移動後に1, 2, 3, 4, 5, 6番のいずれかのマスにいて、3回目にサイコロを振ってゴールに到達する目が出るときである。2回目の移動後に1, 2, 3, 4, 5, 6番のいずれかのマスにいるのは、1, 2回目に出た目が共に1ではなく、なおかつ2回目の移動でゴールしていないときであるから、求める確率は

$$Q_3 = \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - Q_1 \right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{31}{216}$$

である。以上より、3回目までにゴールしないとき確率は

$$1 - Q_2 - Q_3 = \frac{161}{216}$$

である。ここで、 $n \geq 4$ では1, 2, 3, 4, 5番($n=4$ のときのみ1, 2, 3, 4, 5, 6番)のいずれかのマスにいる。したがって、4回目からは(1)と同様の状態と考えられるから、 $n \geq 4$ に対して

$$Q_n = \frac{161}{216} P_{n-3} = \frac{161}{216} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-4} = \frac{161}{1296} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-4}$$

である。また、 $Q_1 = 0$ であることに注意すると、

$$\sum_{k=1}^n k Q_k = 1 \cdot Q_1 + 2 \cdot Q_2 + 3 \cdot Q_3 + \sum_{k=4}^n k Q_k = \frac{47}{72} + \sum_{k=4}^n k Q_k$$

である。ここで、 $S_n = \sum_{k=4}^n k Q_k$ とおくと

$$\begin{cases} S_n = 4 \cdot Q_4 + 5 \cdot Q_5 + 6 \cdot Q_6 + \cdots + n Q_n \\ \frac{5}{6} S_n = 4 \cdot Q_5 + 5 \cdot Q_6 + \cdots + (n-1) Q_n + n Q_{n+1} \end{cases}$$

であるから、辺々引くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} S_n &= 4 \cdot Q_4 + Q_5 + Q_6 + \cdots + Q_n - n Q_{n+1} \\ &= \frac{161}{324} + \frac{161}{1296} \left\{ \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{6} \right)^{n-4} \right\} - n \frac{161}{1296} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} \\ &= \frac{161}{324} + \frac{\frac{161}{1296} \cdot \frac{5}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^{n-4} \right\}}{1 - \frac{5}{6}} - n \frac{161}{1296} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} \\ &= \frac{161}{144} - \frac{161}{216} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} - n \frac{161}{1296} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} \\ \therefore S_n &= \frac{161}{24} - \frac{161}{36} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} - n \frac{161}{125} \left(\frac{5}{6} \right)^n \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\sum_{k=1}^n k Q_k = \frac{47}{72} + S_n = \frac{265}{36} - \frac{161}{36} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} - n \frac{161}{125} \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

であり、 $\left| \frac{5}{6} \right| < 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k Q_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{265}{36} - \frac{161}{36} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} - \frac{161}{125} \cdot n \left(\frac{5}{6} \right)^n \right\} \\ &= \frac{265}{36} - \frac{161}{36} \cdot 0 - \frac{161}{125} \cdot 0 \\ &= \frac{265}{36} \end{aligned}$$

である。

【3】

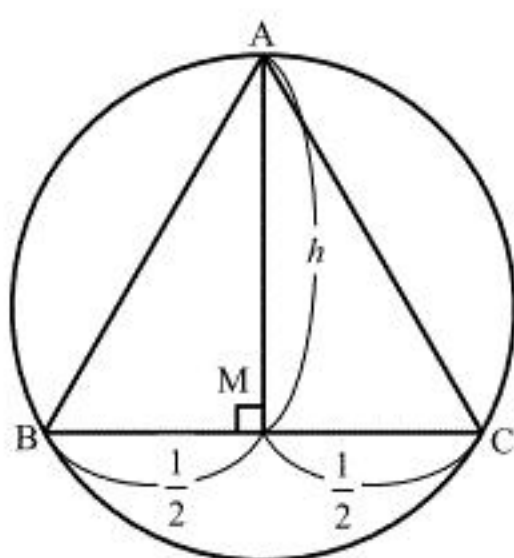
【解答】

(1)	$\boxed{\text{ア}}$
	$\frac{4h^2+1}{8h}$
(2)	$\boxed{\text{イ}}$
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解説】

(1)

辺 BC の中点を M とする。以下に、 $\triangle ABC$ とその外接円および点 M を図示する。



$\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから $BM = \frac{1}{2}$ であり、 $\angle AMB = 90^\circ$ である。ここで、 $\triangle ABM$ について三平方の定理より

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 1}$$

であるから、

$$\sin \angle ABM = \frac{AM}{AB} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 1}}$$

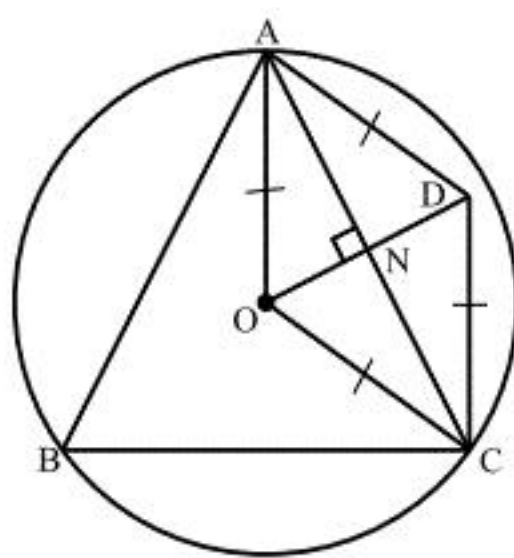
である。したがって、 $\triangle ABC$ について正弦定理より

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{\sin \angle ABM} = \frac{4h^2 + 1}{8h}$$

である。

(2)

平行四辺形 AOCD において $OA = OC (=r)$ であるから、平行四辺形 AOCD はひし形である。以下に、AC の中点を N として平行四辺形 AOCD を図示する。



平行四辺形 AOCD はひし形であるから、2 本の対角線 AC, OD は直交する。いま、

$$AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}\sqrt{4h^2 + 1}$$

であるから、 $\triangle ANO$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned} ON &= \sqrt{OA^2 - AN^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4h^2+1}{8h}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{4h^2+1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4h^2+1}\sqrt{\frac{4h^2+1}{4h^2}-1} \\ &= \frac{\sqrt{4h^2+1}}{8h} \quad (\because h > 0) \end{aligned}$$

である。点 N は線分 OD の中点でもあるから、

$$OD = 2ON = \frac{\sqrt{4h^2+1}}{4h}$$

である。よって、D が外接円 O の円周上にある条件、つまり $OD = r$ となる条件は

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4h^2+1}}{4h} &= \frac{4h^2+1}{8h} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4h^2+1} &= 2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= \frac{3}{4} \quad (\because \sqrt{4h^2+1} > 0) \\ \Leftrightarrow h &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because h > 0) \end{aligned}$$

である。

【 4 】

〔解答〕

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$
	$1-n$	n
(2)	$\boxed{\text{ウ}}$	
	$\frac{n-1}{n}$	
(3)	$\boxed{\text{エ}}$	
	$\frac{\pi}{2(n+1)}$	

〔解説〕

(1) $n \geq 2$ に対して、積の微分公式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos^{n-1} x \sin x) &= \cos^{n-1} x (\sin x)' + (\cos^{n-1} x)' \sin x \\ &= \cos^n x + (n-1)(\cos^{n-2} x)(-\sin^2 x) \\ &= \cos^n x + (n-1)(\cos^{n-2} x)(\cos^2 x - 1) \\ &= (1-n)\cos^{n-2} x + n\cos^n x \end{aligned}$$

であるから、 $\alpha = 1-n$, $\beta = n$ である。

(2)

(1)で得られた等式の両辺を $x:0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ で積分すると

$$\begin{aligned} \left[\cos^{n-1} x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} &= (1-n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \\ \Leftrightarrow 0 &= (1-n)a_{n-2} + na_n \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{n-1}{n} a_{n-2} \quad (\because n \geq 2) \end{aligned}$$

が得られる。

(3)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n} a_{n-2} \text{ の両辺に } a_{n-1} \text{ をかけると} \\ a_n a_{n-1} &= \frac{n-1}{n} a_{n-1} a_{n-2} \end{aligned}$$

となる。この関係式を繰り返すと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} a_n &= \frac{n}{n+1} a_n a_{n-1} \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} a_{n-1} a_{n-2} \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a_1 a_0 \\ &= \frac{1}{n+1} a_1 a_0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ a_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$a_{n+1} a_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

である。

【5】

〔解答〕

$\overline{\mathcal{A}}$	$\overline{\mathcal{I}}$	$\overline{\mathcal{U}}$
$\frac{\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}}{\sqrt{6}l}$	$\frac{4p-2q}{3l^2}$	$\frac{-2p+4q}{3l^2}$

〔解説〕

四面体 OABC は正四面体であるから、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = l\cdot l\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}l^2 \\ |\vec{a}| &= |\vec{b}| = |\vec{c}| = l\end{aligned}$$

である。また、実数 x, y, z を用いて $\overrightarrow{OX} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ とおくと

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{a}\cdot\overrightarrow{OX} = p \\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{OX} = q \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x|\vec{a}|^2 + y\vec{a}\cdot\vec{b} + z\vec{c}\cdot\vec{a} = p \\ x\vec{a}\cdot\vec{b} + y|\vec{b}|^2 + z\vec{b}\cdot\vec{c} = q \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} l^2\left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) = p & \cdots \text{①} \\ l^2\left(\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z\right) = q & \cdots \text{②} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。 $l \neq 0$ であるから、①+②より

$$\begin{aligned}l^2\left\{\frac{3}{2}(x+y) + z\right\} &= p+q \\ \Leftrightarrow x+y &= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{l^2}(p+q) - z\right\} \quad \cdots \text{③}\end{aligned}$$

が得られる。また、①-②より

$$\begin{aligned}l^2\cdot\frac{1}{2}(x-y) &= p-q \\ \Leftrightarrow x-y &= \frac{2}{l^2}(p-q) \quad \cdots \text{④}\end{aligned}$$

が得られる。したがって③、④より

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{l^2}(p+q) - z\right\} + \frac{1}{l^2}(p-q) \\ y &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{l^2}(p+q) - z\right\} - \frac{1}{l^2}(p-q)\end{aligned}$$

となる。以上より、ベクトル $\overrightarrow{OX}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \\ &= -\frac{1}{3}z(\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}) + \left(\frac{4p-2q}{3l^2}\right)\vec{a} + \left(\frac{-2p+4q}{3l^2}\right)\vec{b}\end{aligned}$$

と表せるから、点 X のなす直線は、位置ベクトル $\left(\frac{4p-2q}{3l^2}\right)\vec{a} + \left(\frac{-2p+4q}{3l^2}\right)\vec{b}$ に相当する点を

通る、方向ベクトルが $\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ の直線である。いま、

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 9|\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 6\vec{b}\cdot\vec{c} - 6\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= 6l^2 \\ \therefore |\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}| &= \sqrt{6}l \left(\because |\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}| > 0\right)\end{aligned}$$

であるから、点 X のなす直線の長さ1の方向ベクトルは

$$\vec{u} = \pm \frac{\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}}{\sqrt{6}l}$$

である。このとき、媒介変数 t を用いて、

$$\overrightarrow{OX} = t\vec{u} + \left(\frac{4p-2q}{3l^2}\right)\vec{a} + \left(\frac{-2p+4q}{3l^2}\right)\vec{b}$$

と表せるから、

$$\alpha = \frac{4p-2q}{3l^2}, \beta = \frac{-2p+4q}{3l^2}$$

であることがわかる。

【6】

(1)

与式を因数分解すると

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2(x^2+1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2(x^2+1)$$

(2)

背理法を利用して、「どのような正整数 n に対しても、 $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ が平方数ではない」ことを示す。すなわち、 $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ が平方数となるような正整数 n が存在すると仮定して、矛盾を示す。以上のように仮定すると、(1)の結果を利用して

$$(n+1)^2(n^2+1) = m^2$$

$$\Leftrightarrow n^2+1 = \left(\frac{m}{n+1}\right)^2$$

となる正整数 m が存在する。このとき、 $\alpha = \frac{m}{n+1}$ とおくと左辺が正の整数であるから、 α も

正の整数である。これより、

$$n^2+1 = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-n)(\alpha+n) = 1$$

となるが、 $\alpha-n, \alpha+n$ はどちらも整数であり、かつ $\alpha+n \geq 2$ であるからこの式は成立しない。

以上より、 $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ は平方数ではないことが示された。

(証明終)