

【1】

【解答】

(1)	ア
	$\frac{4}{9}$
(2)	イ
	$\frac{11}{21}$
(3)	ウ
	$\frac{1}{3}$
(4)	エ
	$\frac{5}{14}$
(5)	オ
	$\frac{4}{21}$

【解説】

(1)

2枚のカードの和 S が2で割り切れるのは、2枚とも偶数、または2枚とも奇数を取り出すときであるため、求める確率は、

$$\frac{{}_4C_2 + {}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{6+10}{36} = \frac{4}{9}$$

である。

(2)

3枚のカードの和 S が2で割り切れるのは、3枚とも偶数、または偶数を1枚と奇数を2枚取り出すときであるため、求める確率は、

$$\frac{{}_4C_1 + {}_4C_1 \cdot {}_5C_2}{{}_9C_3} = \frac{4+40}{84} = \frac{11}{21}$$

である。

(3)

2枚のカードの和 S が3で割り切れるのは、2枚とも3の倍数、または3で割って1余る数と3で割って2余る数を1枚ずつ取り出すときである。1から9のうち、3の倍数は3, 6, 9、3で割って1余る数は1, 4, 7、3で割って2余る数は2, 5, 8であるため、求める確率は、

$$\frac{{}_3C_2 + 3 \cdot 3}{{}_9C_2} = \frac{3+9}{36} = \frac{1}{3}$$

である。

(4)

3枚のカードの和 S が3で割り切れるのは、3枚とも3の倍数、または3枚とも3で割って1余る数、または3枚とも3で割って2余る数、または3の倍数と3で割って1余る数と3で割って2余る数を1枚ずつ取り出すときであるため、求める確率は、

$$\frac{{}_3C_3 + {}_3C_3 + {}_3C_3 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_9C_3} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

である。

(5)

3枚のカードの和 S の最小値は1, 2, 3を取り出したときの6、最大値は7, 8, 9を取り出したときの24であるため、 S が6の倍数となるとき、 S は6, 12, 18, 24のいずれかである。6, 24となるのは上に記した1通りずつである。12となるのは

(1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (2, 3, 7), (1, 5, 6), (2, 4, 6), (3, 4, 5) の7通りである。取り出した3枚の組み合わせが (a, b, c) (a, b, c は1から9の異なる整数) であり、 $a+b+c=12$ を満たすとき、 $(10-a, 10-b, 10-c)$ について、 $10-a, 10-b, 10-c$ は1から9の異なる整数であり、

$$\begin{aligned}(10-a) + (10-b) + (10-c) &= 30 - (a+b+c) \\ &= 18\end{aligned}$$

を満たすため、 S が12となる組み合わせ数と18となる組み合わせ数は等しい。よって求める確率は、

$$\frac{1+7+7+1}{{}_9C_3} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$$

である。

【2】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ				
1	0	3	5	3	$\sqrt{5}$				
キ				ク			ケ	コ	
$\frac{1}{2}\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right\}$				$\frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right\}$			$0 \leq \langle x \rangle < 1$	1	

【解説】

$a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}$ (a, b, c, d は整数)のとき、 $b \neq d$ を仮定すると

$$\begin{aligned} a-c &= (d-b)\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5} &= \frac{a-c}{d-b} \end{aligned}$$

となるが、左辺は無理数、右辺は有理数となり矛盾する。よって $b=d$ であり、このとき

$a-c=0$ より $a=c$ も成立する。 $n=0$ のとき $\left(3+\sqrt{5}\right)^0=1+0\cdot\sqrt{5}$ であるため、 $a_0=1, b_0=0$ で

ある。また、

$$\begin{aligned} \left(3+\sqrt{5}\right)^{n+1} &= \left(3+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)^n \\ &= \left(3+\sqrt{5}\right)\left(a_n+b_n\sqrt{5}\right) \\ &= \left(3a_n+5b_n\right)+\left(a_n+3b_n\right)\sqrt{5} \end{aligned}$$

であり、 $3a_n+5b_n, a_n+3b_n$ はともに整数であるから、

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+5b_n \\ b_{n+1}=a_n+3b_n \end{cases}$$

である。数学的帰納法を利用して、 $\left(3-\sqrt{5}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{5}$ であることを示す。

[1] $n=0$ のとき

(左辺)=1, (右辺)=1 より等式は成立している。

[2] $n=k$ (k は 0 以上の整数)のとき成り立っている、つまり、

$$\left(3-\sqrt{5}\right)^k=a_k-b_k\sqrt{5}$$

が成り立っていると仮定する。このとき、仮定と $\{a_n\}, \{b_n\}$ の漸化式より、

$$\begin{aligned} \left(3-\sqrt{5}\right)^{k+1} &= \left(3-\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)^k \\ &= \left(3-\sqrt{5}\right)\left(a_k-b_k\sqrt{5}\right) \\ &= \left(3a_k+5b_k\right)-\left(a_k+3b_k\right)\sqrt{5} \\ &= a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{5} \end{aligned}$$

となるため $n=k+1$ のときも成立する。

以上[1], [2]より、 $\left(3-\sqrt{5}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{5}$ が 0 以上の整数 n に対して成立する。ゆえに、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(a_n+b_n\sqrt{5}\right)+\left(a_n-b_n\sqrt{5}\right)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right\} \\ b_n &= \frac{\left(a_n+b_n\sqrt{5}\right)-\left(a_n-b_n\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

である。定義より、

$$[x] \leq x < [x]+1$$

であるため、 $0 \leq x-[x] < 1$ である。つまり、 $\langle x \rangle$ のとり得る値の範囲は $0 \leq \langle x \rangle < 1$ である。

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^n=2a_n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n \text{ と } 0 < \left(3-\sqrt{5}\right)^n < 1 \text{ より}$$

$$2a_n-1 < \left(3+\sqrt{5}\right)^n < 2a_n$$

が成り立つ。 $2a_n-1$ は整数より、 $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right]=2a_n-1$ であり、

$$\begin{aligned} \left\langle \left(3+\sqrt{5}\right)^n \right\rangle &= \left(3+\sqrt{5}\right)^n - \left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right] \\ &= \left(3+\sqrt{5}\right)^n - (2a_n-1) \\ &= 1 - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \end{aligned}$$

である。 $0 < 3-\sqrt{5} < 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3-\sqrt{5}\right)^n = 0$ であるため、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left(3+\sqrt{5}\right)^n \right\rangle &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3-\sqrt{5}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

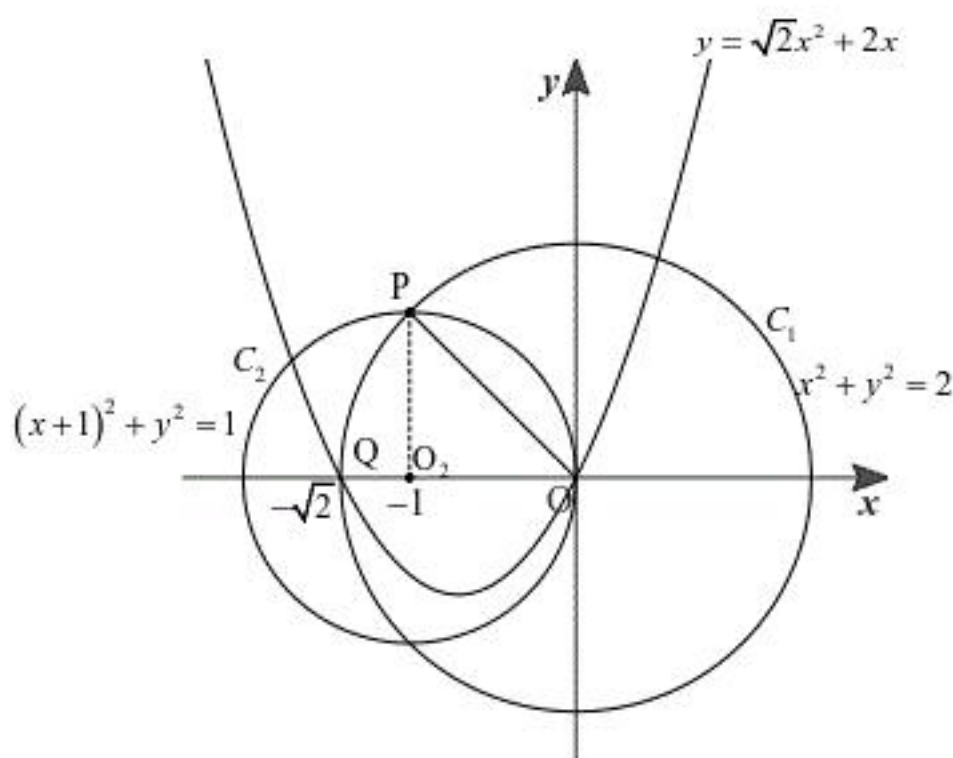
である。

【3】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
2	$\frac{2}{3}$	$(-1, 1), (-1, -1)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}$

【解説】



C_1 と x 軸の交点の座標は、 $(-\sqrt{2}, 0)$ である。この点が放物線 $y = \sqrt{2}x^2 + ax$ 上にあるため、

$$0 = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2})^2 + a \cdot (-\sqrt{2})$$

$$\therefore a = 2$$

である。この放物線と x 軸で囲まれた図形の面積は

$$\int_{-\sqrt{2}}^0 \left\{ -(\sqrt{2}x^2 + 2x) \right\} dx = \sqrt{2} \cdot \int_{-\sqrt{2}}^0 \left\{ -x(x + \sqrt{2}) \right\} dx$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{6} \left\{ 0 - (-\sqrt{2})^3 \right\}$$

$$= \frac{2}{3}$$

となる。 C_1 の方程式は

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、 C_2 の方程式は

$$(x+1)^2 + y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 C_1 と C_2 の交点は①、②の連立方程式の解である。

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: 2x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

となり、これを①に代入して $y = \pm 1$ が得られる。よって交点の座標は $(-1, 1), (-1, -1)$ である。

円 C_2 の中心を O_2 とすると、三角形 PO_2O は $\angle O_2 = 90^\circ, PO_2 = O_2O = 1$ の直角二等辺三角形で

あるため、扇形 A の中心角は $\frac{\pi}{4}$ である。よって求める面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{4}$$

である。図形 B の面積は図形 A の面積と O_2 を中心とする扇形 O_2PO の面積の和から、放物線 $y = \sqrt{2}x^2 + 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積と三角形 O_2PO の面積の和を引いたものである。よって求める面積は、

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}$$

である。

【4】

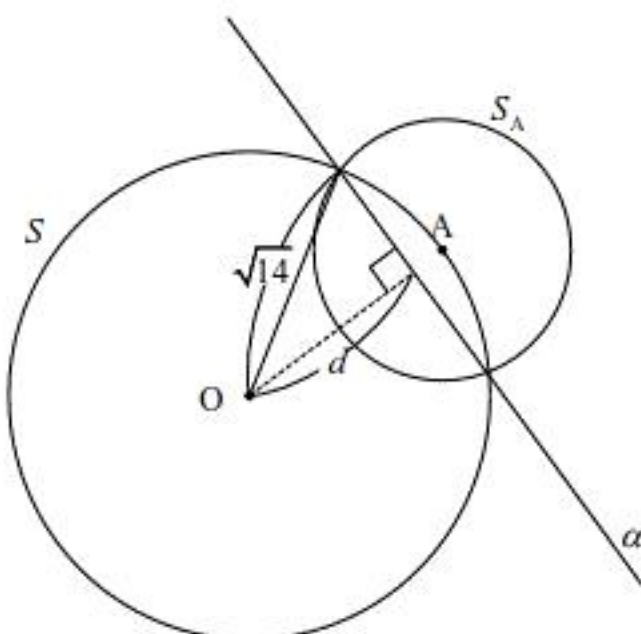
【解答】

(1)	ア	イ
	0	$2\sqrt{14}$
(2)	ウ	
	$\frac{t\sqrt{56-t^2}}{2\sqrt{14}}$	
(3)	エ	オ
	$\sqrt{28-10\sqrt{7}}$	$\left(\sqrt{7}, \frac{4\sqrt{7}}{5}, \frac{3\sqrt{7}}{5}\right)$
(4)	カ	
	$2\sqrt{7-\sqrt{42}}$	

【解説】

球面 S の半径は $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ である。

(1)



球面 S 上に球面 S_A の中心 A があるため、球面 S と球面 S_A が接するのは $t=2\sqrt{14}$ となるときである。よって、 $0 < t < 2\sqrt{14}$ のとき、球面 S と球面 S_A は円で交わる。

(2)

球面 S の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=14 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、球面 S_A の方程式は

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=t^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①-②で表される、

$$4x+6y+2z+(t^2-28)=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を平面 α とすると、円 C_A は平面 α と球面 S の共通部分である。原点と平面 α の距離 d は、

$$\begin{aligned} d &= \frac{|4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (t^2 - 28)|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|t^2 - 28|}{2\sqrt{14}} \end{aligned}$$

となる。よって、円 C_A の半径は、

$$\begin{aligned} \sqrt{14-d^2} &= \sqrt{14 - \frac{(t^2-28)^2}{56}} \\ &= \sqrt{\frac{28^2 - (t^2-28)^2}{56}} \\ &= \sqrt{\frac{t^2(56-t^2)}{56}} \\ &= \frac{t\sqrt{56-t^2}}{2\sqrt{14}} \end{aligned}$$

である。

(3)

球面 S_B の方程式は

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=t^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。①-④で表される、

$$6x+2y+4z+(t^2-28)=0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

を平面 β とすると、円 C_B は平面 β と球面 S の共通部分である。ゆえに、円 C_A と円 C_B の共有点は平面 α 、平面 β 、球面 S の共有部分である。

$$\textcircled{3}-\textcircled{5}: -2x+4y-2z=0 \Leftrightarrow 2y=x+z \quad \cdots \textcircled{6}$$

となり、これを③に代入して、

$$\begin{aligned} 4x+3(x+z)+2z+(t^2-28) &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{7x+(t^2-28)}{5} \end{aligned}$$

となる。これを⑥に代入して、

$$y = -\frac{2x+(t^2-28)}{10}$$

となる。これらが平面 α と平面 β が交わってできる直線である。

円 C_A と円 C_B が共有点をもつ

$$\Leftrightarrow \text{直線 } y = -\frac{2x+(t^2-28)}{10}, z = -\frac{7x+(t^2-28)}{5} \text{ と球面 } S \text{ が共有点をもつ}$$

$$\Leftrightarrow x \text{ の二次方程式 } x^2 + \left\{ -\frac{2x+(t^2-28)}{10} \right\}^2 + \left\{ -\frac{7x+(t^2-28)}{5} \right\}^2 = 14 \text{ が実数解をもつ}$$

$$\Leftrightarrow \text{判別式を } D \text{ とおくと、} D \geq 0$$

であるから、二次方程式は $3x^2 + \frac{3}{5}(t^2-28)x + \frac{1}{20}(t^2-28)^2 - 14 = 0$ であるため、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{3}{5}(t^2-28) \right\}^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left\{ \frac{1}{20}(t^2-28)^2 - 14 \right\} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 168 &\geq \frac{6}{25}(t^2-28)^2 \\ \Leftrightarrow -10\sqrt{7} &\leq t^2-28 \leq 10\sqrt{7} \\ \Leftrightarrow 28-10\sqrt{7} &\leq t^2 \leq 28+10\sqrt{7} \end{aligned}$$

である。一方、(1)より $0 < t^2 < 56$ であり、 $10\sqrt{7} = \sqrt{700} < \sqrt{784} = 28$ より求める範囲は(1)に含まれる。よって、 $\sqrt{28-10\sqrt{7}} \leq t \leq \sqrt{28+10\sqrt{7}}$ であり、 t の最小値は $\sqrt{28-10\sqrt{7}}$ である。このとき二次方程式は重解をもち、その値は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\frac{3}{5}(t^2-28)}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{\frac{3}{5} \cdot 10\sqrt{7}}{6} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

である。これを $y = -\frac{2x+(t^2-28)}{10}$ 、 $z = -\frac{7x+(t^2-28)}{5}$ に代入して、求める共有点の座標は

$$\left(\sqrt{7}, \frac{4\sqrt{7}}{5}, \frac{3\sqrt{7}}{5}\right) \text{ である。}$$

(4)

球面 S_C の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=t^2 \quad \cdots \textcircled{7}$$

である。①-⑦で表される、

$$2x+4y+6z+(t^2-28)=0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

を平面 γ とする。平面 α と平面 β が交わってできる直線 $y = -\frac{2x+(t^2-28)}{10}$ 、

$z = -\frac{7x+(t^2-28)}{5}$ を⑧に代入して、

$$\begin{aligned} 2x+4\left(-\frac{2x+(t^2-28)}{10}\right)+6\left(-\frac{7x+(t^2-28)}{5}\right)+(t^2-28) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{12}(t^2-28) \end{aligned}$$

となる。これを直線の式に代入して、 $x=y=z=-\frac{1}{12}(t^2-28)$ が得られる。3つの円 C_A 、 C_B 、 C_C

の共有点は、平面 α 、平面 β 、平面 γ と球面 S の共有部分であるため、

3つの円 C_A 、 C_B 、 C_C のすべてに共有される点が存在する

$$\Leftrightarrow \text{平面 } \alpha, \text{ 平面 } \beta, \text{ 平面 } \gamma \text{ の交点 } \left(-\frac{1}{12}(t^2-28), -\frac{1}{12}(t^2-28), -\frac{1}{12}(t^2-28)\right) \text{ が球}$$

面 S 上に存在する

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3\left\{-\frac{1}{12}(t^2-28)\right\}^2 &= 14 \\ \Leftrightarrow t^2-28 &= \pm 4\sqrt{42} \\ \Leftrightarrow t^2 &= 28 \pm 4\sqrt{42} \end{aligned}$$

であるから、 $28-4\sqrt{42} > 0$ ($\because \sqrt{42} < 7$) より、 $0 < t < 2\sqrt{14}$ における条件を満たす t の最小値は

$$2\sqrt{7-\sqrt{42}} \text{ である。}$$

【5】

(1)

速度を時間について積分すると変位が得られるから

$$\begin{aligned}x_A(t) &= \int_0^t v_A(u) du \\&= \int_0^t c_A e^{-ku} du \\&= \left[\frac{c_A e^{-ku}}{-k} \right]_0^t \\&= \frac{c_A}{k} (1 - e^{-kt}) \\x_B(t) &= \int_T^t v_B(u) du \\&= \int_T^t c_B e^{-k(u-T)} du \\&= \left[\frac{c_B e^{-k(u-T)}}{-k} \right]_T^t \\&= \frac{c_B}{k} \{1 - e^{-k(t-T)}\}\end{aligned}$$

である。 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = 0$ より、

$$\begin{aligned}L_A &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_A(t) \\&= \frac{c_A}{k} \\L_B &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_B(t) \\&= \frac{c_B}{k}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x_A(t) = \frac{c_A}{k} (1 - e^{-kt}), \quad x_B(t) = \frac{c_B}{k} \{1 - e^{-k(t-T)}\}, \quad L_A = \frac{c_A}{k}, \quad L_B = \frac{c_B}{k}$$

(2)

R は P と Q の間にあるため、

$$\begin{aligned}PR + RQ &= L \\ \Leftrightarrow x_A(T) + x_B(t_0) &= L \\ \Leftrightarrow L_A (1 - e^{-kT}) + L_B \{1 - e^{-k(t_0-T)}\} &= L \\ \Leftrightarrow L_A + L_B - L - L_A e^{-kT} &= L_B e^{kT} \cdot e^{-kt_0} \\ \Leftrightarrow L_B e^{-kt_0} &= \frac{L_A + L_B - L - L_A e^{-kT}}{e^{kT}}\end{aligned}$$

となり、ここで $f(T) = \frac{L_A + L_B - L - L_A e^{-kT}}{e^{kT}}$ とおくと、 $f(T)$ が最大するとき、 t_0 は最小となる。

$$\begin{aligned}f'(T) &= \frac{kL_A e^{-kT} \cdot e^{kT} - (L_A + L_B - L - L_A e^{-kT}) k e^{kT}}{e^{2kT}} \\&= \frac{k \{2L_A - (L_A + L_B - L) e^{kT}\}}{e^{2kT}}\end{aligned}$$

より、 $f'(T) = 0 \Leftrightarrow e^{kT} = \frac{2L_A}{L_A + L_B - L}$ であるため、 $f(T)$ の増減表を書くと、以下のようになる。

T	(0)	...	$\frac{1}{k} \log \left(\frac{2L_A}{L_A + L_B - L} \right)$	...
$f'(T)$		+	0	-
$f(T)$		$\nearrow$		$\searrow$

したがって、 $T = \frac{1}{k} \log \left(\frac{2L_A}{L_A + L_B - L} \right)$ のとき、 $f(T)$ は最大になり、 t_0 は最小となる。よって、こ

のときの PR 間の距離は、

$$\begin{aligned}x_A(T) &= L_A \left(1 - \frac{1}{e^{kT}} \right) \\&= L_A \left(1 - \frac{L_A + L_B - L}{2L_A} \right) \\&= \frac{L_A - L_B + L}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{L_A - L_B + L}{2}$$