

平成 31 年 度

試 験 問 題 ②

学 科 試 験

(9 時 ～ 12 時)

【注 意】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中をみてはならない。
2. 試験教科、試験科目、ページ、解答用紙および選択方法は下表のとおりである。

教 科	科 目	ペー ジ	解 答 用 紙 数	選 択 方 法
数 学	数 学	1 ～ 10	2 枚	数学、英語は必須解答とする。 理科は左の 3 科目のうちから 1 科目を選択せよ。
英 語	英 語	11 ～ 14	3 枚	
理 科	化 学	15 ～ 26	3 枚	
	生 物	27 ～ 44	2 枚	
	物 理	45 ～ 52	1 枚	

3. 監督者の指示に従って、選択しない理科科目を含む全解答用紙(10 枚)に受験番号と選択科目(理科のみ)を記入せよ。
 - ① 受験番号欄に受験番号を記入せよ。
 - ② 理科は選択科目記入欄に選択する 1 科目を○印で示せ。

上記①、②の記入がないもの、および理科 2 科目または理科 3 科目選択した場合は答案全部を無効とする。
4. 解答はすべて解答用紙の対応する場所に記入せよ。
5. 問題冊子の余白を使って、計算等を行ってもよい。
6. 試験開始後、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせよ。
7. 解答用紙はいずれのページも切り離してはならない。
8. 解答用紙は持ち帰ってはならない。問題冊子は持ち帰ってよい。

——余白——

(このページに問題はありません)

数 学

【1】 以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させよ.

1 から 9 までの数字が書かれたカードが各 1 枚, 合計 9 枚箱に入っている. 箱から同時に何枚かのカードを取り出す. 取り出したカードに書かれた数の合計を S とする.

- (1) 箱から 2 枚のカードを取り出すとき, S が 2 で割り切れる確率は ア である.
- (2) 箱から 3 枚のカードを取り出すとき, S が 2 で割り切れる確率は イ である.
- (3) 箱から 2 枚のカードを取り出すとき, S が 3 で割り切れる確率は ウ である.
- (4) 箱から 3 枚のカードを取り出すとき, S が 3 で割り切れる確率は エ である.
- (5) 箱から 3 枚のカードを取り出すとき, S が 6 で割り切れる確率は オ である.

【2】 以下の文章の空欄に適切な数、式または数学記号を入れて文章を完成させよ。

n は 0 以上の整数とする。整数からなる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は $(3 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ を満たすとする。このとき、 $a_0 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b_0 = \boxed{\text{イ}}$ であり、 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は次の漸化式を満たす。

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ウ}} a_n + \boxed{\text{エ}} b_n,$$

$$b_{n+1} = a_n + \boxed{\text{オ}} b_n.$$

ところで、 $(3 - \sqrt{5})^n$ を a_n, b_n を用いて表すと $(3 - \sqrt{5})^n = a_n - \boxed{\text{カ}} b_n$ であることから、一般項は

$$a_n = \boxed{\text{キ}},$$

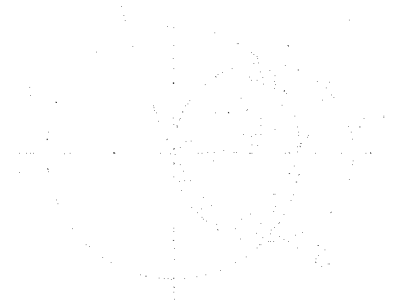
$$b_n = \boxed{\text{ク}}$$

となる。0 以上の実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を $[x]$ と表し、 x の小数部分を $\langle x \rangle = x - [x]$ と表す。 x が 0 以上の実数全体を動くとき、 $\langle x \rangle$ の取りうる値の範囲は $\boxed{\text{ケ}}$ である。 $0 < (3 - \sqrt{5})^n < 1$ であることに注意すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (3 + \sqrt{5})^n \rangle = \boxed{\text{コ}}$$

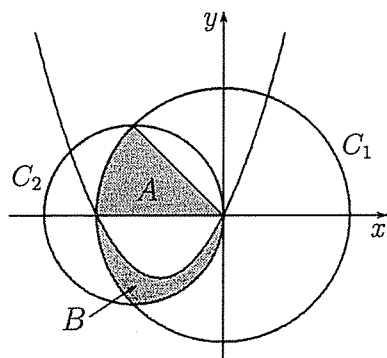
となることが分かる。

-余白 (計算用紙)-



【3】 以下の文章の空欄に適切な数、式または数学記号を入れて文章を完成させよ。

xy 平面の原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C_1 、原点で y 軸に接し、中心の x 座標が負である半径 1 の円を C_2 とする。原点および C_1 と x 軸の交点を通る放物線 $y = \sqrt{2}x^2 + ax$ が下図のように重なっている。このとき、 $a =$ ア で、この放物線と x 軸で囲まれた図形の面積は イ である。また、 C_1 と C_2 の 2 つの交点の座標は ウ で、扇形 A の面積は エ、 C_1, C_2 と放物線で囲まれた図形 B の面積は オ である。（脚注参照）



（脚注） C_1 と C_2 の交点のうち y 座標が正のものを P とする。 C_1 と x 軸の交点のうち x 座標が負のものを Q とする。扇形 A は、線分 OP , OQ と円 C_1 の劣弧 PQ で囲まれる図形である。ただし、劣弧とは円周上の 2 点によって円周を分けたときの、半円より小さい方の弧のことである。図形 B は、 C_1 と C_2 両方の円に囲まれ、さらに放物線より下にある部分である。

— 余白 (計算用紙) —

【4】 以下の文章の空欄に適切な数、式または数学記号を入れて文章を完成させよ。

xyz 空間の原点を中心とする球面 S 上に点 A, B, C があり、各点の座標はそれぞれ $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ である。点 A, B, C を中心とする半径 t の球面をそれぞれ S_A, S_B, S_C とする。

(1) S_A と S の交わりが円となるための t の範囲は $\boxed{\text{ア}} < t < \boxed{\text{イ}}$ である。この円を C_A と表す。このとき、同様に S_B と S の交わり C_B , S_C と S の交わり C_C も円になる。以下では上記の t の範囲で考える。

(2) 円 C_A の半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) 円 C_A と円 C_B が共有点をもつような半径 t の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ で、その共有点の座標は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) 3つの円 C_A, C_B, C_C のすべてに共有される点が存在する場合を考える。そのような t の値はいくつかあり、そのうち最小のものは $t = \boxed{\text{カ}}$ である。

【5】 以下の問に答えよ.

直線上で距離 L だけ離れた 2 地点 P, Q を考える. 時刻 $t = 0$ に初速 c_A で P を出発して Q に向かって動き出した移動体 A の時刻 t での速度が, $v_A(t) = c_A e^{-kt}$ であるとする. ただし, c_A も k も正の定数である. 時刻 T に A がいる地点を R とする. 同時刻 T に R を出発し Q に向かう移動体 B の, 時刻 $t (\geq T)$ での速度は $v_B(t) = c_B e^{-k(t-T)}$ であるとする. ただし, c_B は正の定数である. 以下の問いに答えよ.

- (1) 移動体 A, B の時刻 t までの移動距離をそれぞれ $x_A(t)$, $x_B(t)$ で表す. $t \geq 0$ に対し $x_A(t)$ を, $t \geq T$ に対し $x_B(t)$ を求めよ. さらに, 移動体 A, B の移動可能距離の上限, すなわち以下に定義する量 L_A, L_B を求めよ.

$$L_A = \lim_{t \rightarrow \infty} x_A(t), \quad L_B = \lim_{t \rightarrow \infty} x_B(t)$$

- (2) $L_A < L$, $L_B < L$, $L_A + L_B > L$ の条件のもとで, 移動体 B が Q に到達する時刻を t_0 とする. t_0 が最小となるような R が定まる. そのときの PR 間の距離を L_A, L_B, L を用いて表せ.

