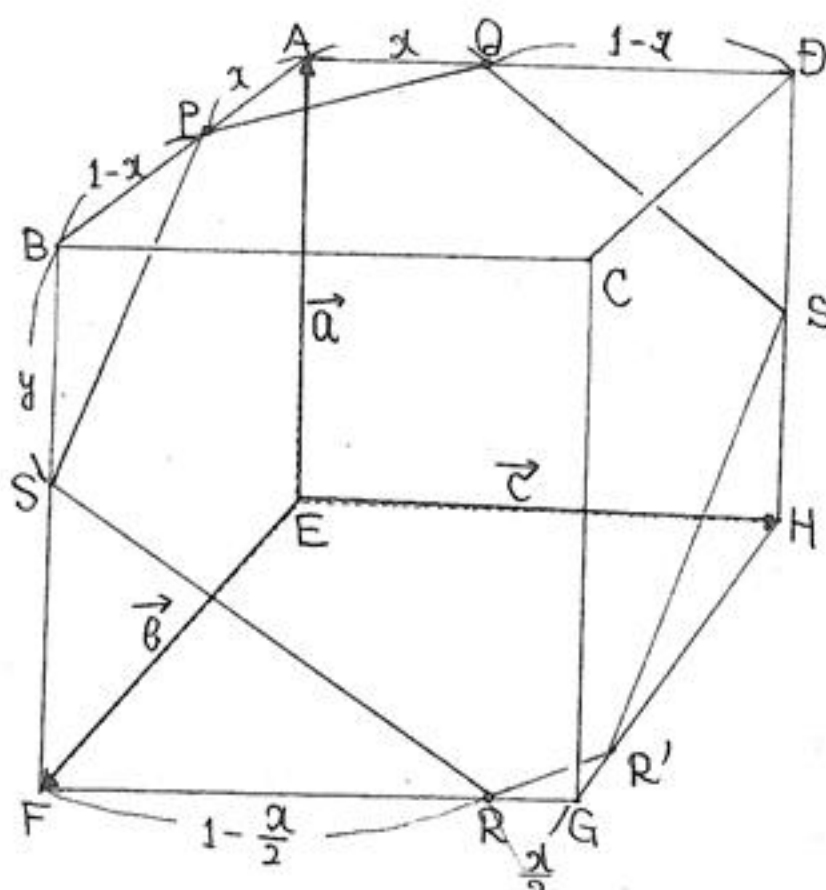




$$\begin{aligned}
 (1) \vec{PR} &= \vec{PB} + \vec{BF} + \vec{FR} \\
 &= (1-x)\vec{AB} - \vec{FB} + (1-\frac{z}{2})\vec{FG} \\
 &= (1-x)\vec{EF} - \vec{EA} + (1-\frac{z}{2})\vec{EH} \\
 &= (1-x)\vec{e} - \vec{a} + (1-\frac{z}{2})\vec{c} \quad \text{--- ① --- (答)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \vec{PQ} &= \vec{PA} + \vec{AQ} = -\vec{AP} + \vec{AQ} \\
 &= -x\vec{AB} + z\vec{AD} = -x\vec{EF} + z\vec{EH} \\
 &= -x\vec{e} + z\vec{c} \quad \text{--- ② ---}
 \end{aligned}$$

$$BS = yz \text{ あり } z.$$

$$\begin{aligned}
 \vec{PS} &= \vec{PB} + \vec{BS} \\
 &= (1-x)\vec{AB} + y\vec{BF} \\
 &= (1-x)\vec{EF} - y\vec{FB} \\
 &= (1-x)\vec{e} - y\vec{a} \\
 &= (1-x)\vec{e} - y\vec{a} \quad \text{--- ③ ---}
 \end{aligned}$$

点Sは3点P, Q, Rが定める平面にあるので, 実数 g, r を用いて

$$\vec{PS} = g\vec{PQ} + r\vec{PR}$$

と表すことができる. ①, ②, ③を代入して.

$$\begin{aligned}
 (1-x)\vec{e} - y\vec{a} &= g\{-x\vec{e} + z\vec{c}\} + r\{(1-x)\vec{e} - \vec{a} + (1-\frac{z}{2})\vec{c}\} \\
 (y-r)\vec{a} + \{-gx + (r-1)(1-x)\}\vec{e} + \{gx + r(1-\frac{z}{2})\}\vec{c} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{e}, \vec{c}$ は同一平面内に含まないベクトルであるから.

$$\begin{cases}
 y-r=0 & \text{--- ④ ---} \\
 -gx + (r-1)(1-x)=0 & \text{--- ⑤ ---} \\
 gx + r(1-\frac{z}{2})=0 & \text{--- ⑥ ---}
 \end{cases}$$

⑤, ⑥より g を消去して.

$$\begin{aligned}
 (r-1)(1-x) + r(1-\frac{z}{2}) &= 0 \\
 (2-\frac{3}{2}x)r &= 1-x \\
 0 < x \leq 1 \text{ であるから, } 2-\frac{3}{2}x > 0 \text{ より} \\
 y=r &= \frac{2(1-x)}{4-3x}
 \end{aligned}$$

ゆえに.

$$\begin{aligned}
 \vec{PS} &= (1-x)\vec{e} - \frac{2(1-x)}{4-3x}\vec{a} \\
 &= \frac{1-x}{4-3x}\{ (4-3x)\vec{e} - 2\vec{a} \} \quad \text{--- (答) ---}
 \end{aligned}$$

(3) 平面が辺GH, EHと交わる点をそれぞれ R', S' とする.

4点A, C, G, Eを通る平面に関する対称性から.

$$BS' = BS = y, GR' = GR = \frac{z}{2} \text{ である.}$$

平面による立方体の切り口の周の長さ L は

$$L = PQ + RR' + 2PS + 2SR$$

$$PQ = \sqrt{2}x, RR' = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\begin{aligned}
 PS^2 &= (1-x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + \left\{ \frac{2(1-x)}{4-3x} \right\}^2 \\
 &= \frac{(1-x)^2}{(4-3x)^2} \{ (4-3x)^2 + 4 \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SR^2 &= (1-y)^2 + (1-\frac{z}{2})^2 = \left\{ \frac{2(1-\frac{z}{2})}{4-3x} \right\}^2 + (1-\frac{z}{2})^2 \\
 &= \frac{(1-\frac{z}{2})^2}{(4-3x)^2} \{ (4-3x)^2 + 4 \}.
 \end{aligned}$$

$0 < x \leq 1$ のとき, $1-x \geq 0, 1-\frac{z}{2} \geq 0, 4-3x \geq 0$, 故に $(4-3x)^2 + 4 > 0$ であるから.

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 2\left\{ \frac{1-x}{4-3x} + \frac{1-\frac{z}{2}}{4-3x} \right\} \sqrt{(4-3x)^2 + 4} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{(4-3x)^2 + 4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \{(4-3x)^2 + 4\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dx} &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{(4-3x) \cdot (-3)}{\sqrt{(4-3x)^2 + 4}} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}(4-3x)}{\sqrt{(4-3x)^2 + 4}} \right\} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4-3x)^2 + 4}} \{ \sqrt{(4-3x)^2 + 4} - \sqrt{2}(4-3x) \} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2^2 - (4-3x)^2}{\sqrt{(4-3x)^2 + 4} \{ \sqrt{(4-3x)^2 + 4} + \sqrt{2}(4-3x) \}} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\{ 2 + (4-3x) \} \{ 2 - (4-3x) \}}{\sqrt{(4-3x)^2 + 4} \{ \sqrt{(4-3x)^2 + 4} + \sqrt{2}(4-3x) \}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3(2-x)(3x-2)}{\sqrt{(4-3x)^2 + 4} \{ \sqrt{(4-3x)^2 + 4} + \sqrt{2}(4-3x) \}}$$

分母 $> 0, 0 < x \leq 1$ より $2-x > 0$ であるから,

$\frac{dL}{dx}$ の符号は $3x-2$ の符号に一致し, x に対する L の増減は次のようになる.

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{dL}{dx}$	-	0	+
L		$\searrow$	$\nearrow$

$$L|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} + \{(4-3 \cdot \frac{2}{3})^2 + 4\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

ゆえに, L は $x = \frac{2}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{2}$ をとる. --- (答)

[後半部の別解]

$$4-3x = 2\tan\theta \text{ あり.}$$

$$x=0, 1 \text{ のときの } \theta \text{ をそれぞれ } \theta_0, \theta_1 \text{ (ただし } 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}) \text{ あり, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ かつ}$$

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \theta_1 \leq \theta < \theta_0 \text{ (ただし } \tan\theta_1 = \frac{1}{2}, \tan\theta_0 = 2) \quad \text{--- } \tan\theta \text{ は}$$

$\cos\theta > 0$ であるから.

単調増加であるから

$$L = \sqrt{2}(2-\tan\theta) + \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta} + \frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}$$

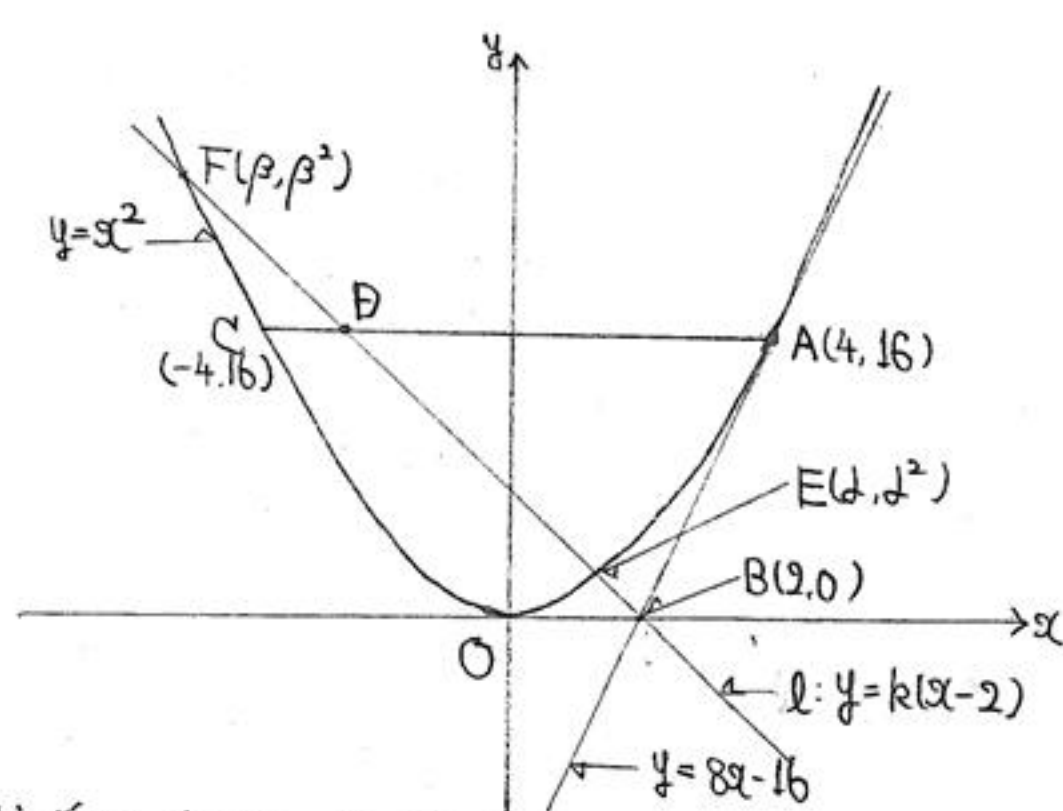
$$= \frac{2}{\cos^2\theta} \left(\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$\cos^2\theta > 0$ より, θ に対する L の増減は次のようになる.

θ	θ_1	$\frac{\pi}{4}$	(θ_0)
$\frac{dL}{d\theta}$	-	0	+
L		$\searrow$	$\nearrow$

$$L|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(2-1) + \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$$

ゆえに, L は $x = \frac{2}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{2}$ をとる.



(1) 点Aにおける放物線の接線は $y = 8x - 16$ より.

点Bの座標は $B(2, 0)$, よて直線 l の方程式は $y = k(x-2)$ ($k < 0$)

直線 l が線分ACと点C以外の点で交わるから.

$k(x-2) = 16$ が $-4 < x \leq 4$ を満たす解をもつ k の条件を求めよ.

$k \neq 0$ より $x = \frac{16}{k} + 2$ であるから

$$-4 < \frac{16}{k} + 2 \leq 4$$

$$-6 < \frac{16}{k} \leq 2$$

$k < 0$ より右側の不等式は成り立ち, 左側の不等式を解いて

k のとりうる値の範囲は

$$k < -\frac{8}{3} \quad \text{---(答)}$$

(2) $l: y = k(x-2)$ ($k < 0$) であるから, α, β ($\beta < \alpha$) は

$$x^2 = k(x-2) \Leftrightarrow x^2 - kx + 2k = 0$$

の2解であり, $x^2 - kx + 2k = (x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるから

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = 2k. \quad (\text{解と係数の関係})$$

よって.

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = k^2 - 8k.$$

$k < -\frac{8}{3}$ のとき, $k^2 - 8k > 0$ であり.

$$\alpha - \beta > 0 \text{ であるから, } \alpha - \beta = (k^2 - 8k)^{\frac{1}{2}} \quad \text{---(答)}$$

(3) (線分DE, DAと放物線で囲まれる図形の面積)

= (線分DF, DCと放物線で囲まれる図形の面積) のとき,

双方に線分DC, DEと放物線で囲まれる図形を加えることにより.

(線分EFと放物線で囲まれる図形の面積)

= (線分ACと放物線で囲まれる図形の面積)

($\beta < x < \alpha$ において $k(x-2) - x^2 > 0$) であるから.

($-4 < x < 4$ において $16 - x^2 > 0$)

$$\int_{\beta}^{\alpha} \{k(x-2) - x^2\} dx = \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx$$

$$- \int_{\beta}^{\alpha} (x-\beta)(x-\alpha) dx = - \int_{-4}^4 (x+4)(x-4) dx$$

$$\frac{(\alpha - \beta)^3}{6} = \frac{\{4 - (-4)\}^3}{6}$$

$$(\alpha - \beta)^3 = 8^3$$

$\alpha - \beta$ は実数であるから.

$$\alpha - \beta = 8$$

(2) より

$$(k^2 - 8k)^{\frac{1}{2}} = 8$$

$$k^2 - 8k - 64 = 0$$

$$\therefore k = 4 \pm \sqrt{4^2 + 64} = 4 \pm 4\sqrt{5}$$

$4 < 5 < \frac{25}{4}$ より $2 < \sqrt{5} < \frac{5}{2}$ であるから $-6 < 4 - 4\sqrt{5} < -4 < -\frac{8}{3}$

ゆえに, 条件を満たす k の値は $k = 4(1 - \sqrt{5})$ --- (答)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 2b_n & \text{--- ①} \\ b_{n+1} = -2a_n + b_n & \text{--- ②} \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \begin{matrix} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{matrix}$$

(1) ①+②を考えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$c_n = a_n + b_n \text{ とおく, } c_1 = 2$$

$$c_{n+1} = 3c_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

すなわち, $\{c_n\}$ は初項 2, 公比 3 の等比数列であるから, 一般項は

$$c_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{--- (答)}$$

(2) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - a_n$ を ① に代入して

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_n + 2(2 \cdot 3^{n-1} - a_n) \\ &= 3a_n + 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

両辺を 3^{n+1} で割る

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{4}{9} \quad (n=1, 2, \dots)$$

よって, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{a_1}{3^1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{a_k}{3^k} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{9}(n-1) = \frac{4n-1}{9} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。ゆえに

$$a_n = (4n-1)3^{n-2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{--- (答)}$$

[参考]

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, \dots) \text{ とおく}$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

帰納的に $\vec{p}_n = A^{n-1}\vec{p}_1$ ($n=1, 2, \dots$) であるから, A^n が求まればよい。

ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2 - 6A + 9E = (A - 3E)^2 = 0$$

よって, 二項定理より, $n \geq 2$ のとき

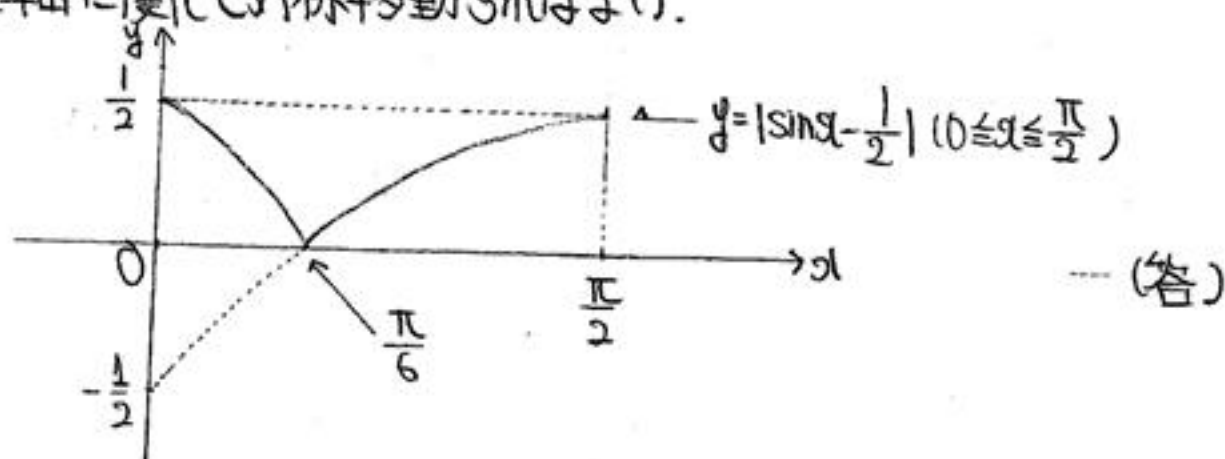
$$\begin{aligned} A^n &= \{(A - 3E) + 3E\}^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k (A - 3E)^k (3E)^{n-k} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k 3^{n-k} (A - 3E)^k \\ &= \sum_{k=2}^n {}_nC_k 3^{n-k} (A - 3E)^k + {}_nC_1 3^{n-1} (A - 3E) + {}_nC_0 3^n (A - 3E)^0 \\ &= {}_n 3^{n-1} (A - 3E) + 3^n E \quad (\because k \geq 2 \text{ のとき } (A - 3E)^k = 0) \\ &= {}_n 3^{n-1} A - 3^n (n-1) E \\ &= 3^{n-1} \{ nA - 3(n-1)E \} \\ &= 3^{n-1} \left\{ n \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 3(n-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2n+3 & 2n \\ -2n & -2n+3 \end{pmatrix} \quad (\text{これは } n=0, 1 \text{ のときも正しい。}) \end{aligned}$$

ゆえに, $\vec{p}_n = A^{n-1}\vec{p}_1$ より

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-2} \{ (2n+1)a_1 + 2(n-1)b_1 \} \\ &= (4n-1)3^{n-2} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

(1) $y = |\sin x - \frac{1}{2}|$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) のグラフは,

$y = \sin x - \frac{1}{2}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) のグラフの $y < 0$ の部分を
 x 軸に関して対称移動すればよい.



(2) $F(x) = -\cos x - \frac{1}{2}x$ とおくと, $F'(x) = \sin x - \frac{1}{2}$ であり,

$$F(0) = -1, F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right), F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= -[F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + [F(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\left\{F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0)\right\} + \left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= F(0) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -1 - \frac{\pi}{4} + \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \quad \text{--- (答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|^2 &= \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 = \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin x + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$G(x) = -\frac{1}{4} \sin 2x + \cos x + \frac{3}{4}x$ とおくと, $G'(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|^2$ であり.

$$G(0) = 1, G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \{f(x)\}^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|^2 dx \\ &= \pi [G(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left\{G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0)\right\} \\ &= \left(\frac{3}{8}\pi - 1\right)\pi \quad \text{--- (答)} \end{aligned}$$